Zadania obejmujące materiał kolokwium 2

Zadanie 1 *Zbadaj dla jakich* $t \in \mathbb{R}$ *wektor* $v = (0,1,5,3,t) \in \mathbb{R}^5$ *jest kombinacją liniową wektorów* $v_1 = (2,-1,3,4,0)$, $v_2 = (1,1,2,2,-1)$ *oraz* $v_3 = (3,-1,0,3,2)$*?*

Zadanie 2 *Niech* $A \neq V$ *będzie podprzestrzenią* V *zaś* $\mathcal{B}$ *liniowo niezależnym podzbiorem przestrzeni* V*. Wykaż, że* $\mathcal{B}$ *można uzupełnić do bazy* V *wektorami z* $V \setminus A$*.*

Zadanie 3
Niech $V = \operatorname{lin}((1,2,0,1),(2,3,1,0),(0,1,-1,t))$ *będzie podprzestrzenią* R^4*.*
a) Znajdź $\dim V$ *w zależności od* $t \in R$*.*
b) Dla $t = 2$ *podaj przykład bazy przestrzeni* V*.*

Zadanie 4
Niech $W = \{w(x) \in R[x] \mid st\, w(x) < 5,\ w(-1) = 0,\ w'(1) = w''(0)\}$
będzie podzbiorem przestrzeni wielomianów nad liczbami rzeczywistymi opisanym przy pomocy równań i pochodnych. Wykaż, że W *jest przestrzenią liniową i znajdź jej bazę.*

Zadanie 5 *Niech* $\mathcal{C}$ *będzie przestrzenią funkcji ciągłych z* $\mathbb{R}$ *w* $\mathbb{R}$ *nad ciałem liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$*. Dla podprzestrzeni* $A = \{f(x) \mid f(2) = 0, f(1) = f(3)\}$ *znajdź taką podprzestrzeń* B*, by* $\mathcal{C} = A \oplus B$*.*

Zadanie 6
Niech $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4\ ;\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$.
a) Znajdź bazę i wymiar przestrzeni W*.*
b) Zbadaj czy istnieje baza przestrzeni W *zawierająca wektor* $(1,1,-1,2)$*?*
Jeśli tak to podaj przykład takiej bazy.

Zadanie 7 *Zbadaj dla jakich wartości parametru* $r \in R$
wektor $(r,\ r,1) \in \operatorname{lin}\{(2,r,-r),(1,2,-2)\} \subset R^3$?

Zadanie 8 *Znajdź bazę przestrzeni*
$\operatorname{lin}\{(1,2,3,4,5),\ (2,3,4,5,6),\ (3,4,5,6,7),\ (0,1,2,3,4),\ (-1,-1,-2,-3,-4)\}$

Zadanie 9
Niech $V = \operatorname{lin}\{(1,2,3,4),\ (2,3,4,5),\ (3,4,5,6),\ (1,1,2,3)\} \subset \mathbb{R}^4$*. Znajdź układ równań liniowych opisujących* V*.*

Zadanie 10
Niech $V = \operatorname{lin}\{(1,2,-1,4),\ (2,3,-2,7),\ (3,1,-3,7),\ (1,1,-1,3)\} \subset \mathbb{R}^4$*.*
Znajdź układ równań liniowych opisujących V*.*

Zadanie 11 *Niech A i B będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V. Udowodnij równoważność warunków:*

1) Każdy wektor z przestrzeni $A+B$ daje się jednoznacznie zapisać jako suma wektora z A i wektora z B.

2) Istnieje wektor z przestrzeni $A+B$ który daje się jednoznacznie zapisać jako suma wektora z A i wektora z B.

3) Jeżeli dla pewnych wektorów $\alpha \in A$ i $\beta \in B$ zachodzi $\alpha + \beta = \theta$ to $\alpha = \theta$ i $\beta = \theta$.

4) $A \cap B = \{\theta\}$.

Zadanie 12 *Niech A, B, C będą podprzestrzeniami V.*

1) Zbadaj czy zawsze $A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C$.

2) Wykaż, że $A \cap B + A \cap C \subset A \cap (B + C)$.

3) Wykaż, że dowolna z inkluzji $A \subset B$, $B \subset A$ lub $B \subset C$ implikuje równość $A \cap B + A \cap C = A \cap (B + C)$.

Zadanie 13 *Niech A i B będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V. Udowodnij nierówność:*

$$dim\, A + dim\, B - dim\, V \leq dim\, A \cap B \leq dim\, A$$

.

Zadanie 14 *Niech $V = \mathrm{lin}\left((1,2,0,1), (2,3,1,0), (0,1,-1,t)\right)$ będzie podprzestrzenią R^4.*

a) Znajdź $\dim V$ w zależności od $t \in R$.

b) Dla $t = 2$ podaj przykład bazy przestrzeni V.

Zadanie 15 *Niech $A = \mathrm{lin}\{(1,2,3,4), (4,1,5,2), (2,-3,-1,-6), (1,1,2,2)\}$ i $B = \mathrm{lin}\{(1,2,1,4), (0,2,2,4), (2,1,-1,2)\}$ będą podprzestrzeniami R^4.*

a) Policz wymiar A.

b) Znajdź bazę przestrzeni $A \cap B$.

c) Znajdź bazę przestrzeni $A + B$.

Zadanie 16

Niech $W \subset R^3$ będzie przestrzenią opisaną układem:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Znajdź podprzestrzeń A taką, że $(1,0,0) \in A$ i $R^3 = W \oplus A$.

b) Napisz wzór analityczny rzutu $f : R^3 \to R^3$ na W wzdłuż A.

Zadanie 17 *Niech $A = \mathrm{lin}\{(1,2,3,4), (4,3,2,1), (2,3,4,5)\} \subset R^4$*

a) Policz wymiar A.

b) Znajdź takie podprzestrzenie $B, C \subset R^4$ by $R^4 = A \oplus B = B \oplus C = C \oplus A$ lub wykaż, że takie podprzestrzenie nie istnieją.

Zadanie 18 *Znajdź bazę jądra i obrazu przekształcenia liniowego* $\phi : R^3 \to R^3$ *danego wzorem:*
$$\phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 + 2x_2 - x_{3,}\ x_1 + x_2 + 2x_{3,}\ 2x_1 + 3x_2 + x_3\right).$$

Zadanie 19 *Znajdź macierz i wzór analityczny przekształcenia liniowego* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *spełniającego warunki:*
$f\left(1,2,3,1\right) = (1,3,1),\ (1,5,4,1) \in \ker f,\ (1,1,2) \in \mathrm{im}\ f,\ (7,5,0) \in \mathrm{im}\ f.$