Wykład 1

Definicja 1.1 *Ciałem nazywamy strukturę algebraiczną (algebrę)* $\mathbf{K} = \{K; 0, 1, +, \cdot\}$*, w której: K jest zbiorem z wyróżnionymi dwoma różnymi elementami 0 i 1, oraz dwoma działaniami $+$ i $\cdot$ zwanymi dodawaniem i mnożeniem. Działania te przyporządkowują parze elementów zbioru K jeden element zwany wynikiem działania. W ciele działania spełniają następujące warunki zwane aksjomatami ciała:*

Dla każdych $a, b, c \in K$

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$	*łączność dodawania*
2) $a + b = b + a$	*przemienność dodawania*
3) $0 + a = a + 0 = a$	*0 jest elementem neutralnym dodawania*
4) $\forall_{a\in K}\ \exists_{p\in K}\ a + p = 0$	*istnienie elementu przeciwnego*
5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	*łączność mnożenia*
6) $a \cdot b = b \cdot a$	*przemienność mnożenia*
7) $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$	*1 jest elementem neutralnym mnożenia*
8) $\forall_{a\in K, a\neq 0}\ \exists_{q\in K}\ a \cdot q = 1$	*istnienie elementu odwrotnego*
9) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	*rozdzielność mnożenia względem dodawania*

Uwaga. Element przeciwny do a oznaczamy symbolem $-a$ zaś odwrotny symbolem a^{-1}.

Przykład 1.2 *Ciałami są:*

a) Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ z naturalnymi działaniami $+$ i $\cdot$.

b) Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami $+$ i $\cdot$.

c) Funkcje wymierne $\mathbb{R}(x)$ z naturalnymi działaniami tzn. określonymi wzorami:

$(f + g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) + g(x)$

$(f \cdot g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) \cdot g(x)$.

Ciałami nie są:

a) Liczby naturalne $\mathbb{N}$ z naturalnymi działaniami $+$ i $\cdot$.

b) Liczby całkowite $\mathbb{Z}$ z naturalnymi działaniami $+$ i $\cdot$.

c) Funkcje wymierne $\mathbb{R}(x)$ z naturalnymi działaniem $+$ i składaniem $\circ$.

Przykład 1.3 *Zbiór $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ z działaniami określonymi następującymi tabelami jest ciałem.*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Podstawowe własności ciał:

Twierdzenie 1.4 *Niech a i b będą dowolnymi elementami ciała K. Wówczas:*

1) $a \cdot 0 = 0$

2) $a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow\ a = 0$ *lub* $b = 0$

3) $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot x + b = c$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
4) Element przeciwny jest wyznaczony jednoznacznie.
5) Element odwrotny jest wyznaczony jednoznacznie.

Definicja 1.5 *Układem równań liniowych n zmiennych nad ciałem K nazywamy układ w postaci:*

$$L : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + \cdots + a_{s,n}x_n = b_s \end{cases},$$

gdzie $a_{i,j}$ i b_j są liczbami z ciała K. Liczby b_j nazywamy wyrazami wolnymi.

Układ w którym wszystkie wyrazy wolne są równe 0 nazywamy jednorodnym.

Rozwiązaniem układu L nazywamy każdy n-elementowy ciąg $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in K^n$ liczb z ciała K, który po podstawieniu do równań da równości. To znaczy $\forall_{1 \leq i \leq s} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}c_j = b_i$.

Definicja 1.6 *Macierz to sposób zapisu liczb lub danych w postaci prostokąta. Linie poziome macierzy nazywamy wierszami zaś pionowe kolumnami. Każdemu miejscu macierzy przyporządkowujemy parę liczb (współrzędnych) - numer wiersza i numer kolumny.*

Uwaga 1 *Formalną definicję macierzy można przedstawić następująco:*
Macierz jest to zbiór indeksowany parą zbiorów.
lub
Macierz jest to funkcja z iloczynu kartezjańskiego w zbiór.

Definicja 1.7 *Macierzą układu równań L nazywamy macierz*

$$M(L) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix} = [a_{i,j}]_{i=1,\ j=1}^{s\quad n}$$

Macierzą uzupełnioną układu równań L nazywamy macierz

$$M(L)^U = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} & b_s \end{array}\right] = [a_{i,j}|b_i]_{i=1,\ j=1}^{s\quad n}$$

Definicja 1.8 *Niech $M = [a_{i,j}]_{i=1,\ j=1}^{t\quad n}$ będzie macierzą o t wierszach i n kolumnach o współczynnikach z ciała K.*

Schodkiem macierzy M nazywamy takie miejsce macierzy w którym stoi liczba niezerowa zaś z lewej strony i poniżej są same 0.

Formalnie: miejsce (i,j) jest schodkiem gdy:

$a_{i,j} \neq 0$ *oraz* $p \geq i \ \wedge \ q < j \Rightarrow a_{p,q} = 0$ *oraz* $p > i \ \wedge \ q \leq j \Rightarrow a_{p,q} = 0$.

Macierz jest w postaci schodkowej gdy w każdym niezerowym wierszu jest schodek i wszystkie zerowe wiersze są poniżej niezerowych.

Macierz jest w postaci schodkowej zredukowanej gdy jest w postaci schodkowej i każda kolumna zawierająca schodek ma jedną 1 zaś pozostałe współczynniki zerowe.

Definicja 1.9 *Niech L będzie układem równań, którego macierz jest w postaci schodkowej zredukowanej. Zmienne odpowiadające kolumnom zawierającym schodki nazywamy zmiennymi związanymi zaś pozostałe zmienne parametrami.*

Twierdzenie 1.10 *Jeżeli* $M(L)^U$ *macierz uzupełniona układu równań L jest w postaci schodkowej zredukowanej to:*

i) układ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy gdy schodek wypada w kolumnie wyrazów wolnych.

ii) Jeżeli układ jest niesprzeczny to każde rozwiązanie otrzymujemy podstawiając dowolne liczby za parametry (zmienne nie leżące na schodkach).

Wykład 2

Definicja 2.1 *Niech* $W = (w_1, w_2, ..., w_n)$ *będzie ciągiem. Następujące przekształcenia ciągu W nazywamy operacjami elementarnymi:*

Typ 1) Do j-tego wyrazu ciągu dodajemy inny pomnożony przez liczbę.

Typ 2) Zamieniamy miejscami dwa wyrazy ciągu.

Typ 3) j-ty wyrazu ciągu mnożymy przez niezerową liczbę.

Twierdzenie 2.2 *Operacje elementarne są odwracalne.*

Zadanie. Zamianę kolejności dwóch wyrazów ciągu można uzyskać stosując pozostałe operacje elementarne.

Twierdzenie 2.3 *Stosując operacje elementarne typu 1 na wierszach, każdą macierz można doprowadzić do postaci schodkowej. Stosując dodatkowo jedną operacje typu 3 na wierszach, każdą macierz można doprowadzić do postaci schodkowej zredukowanej.*

Twierdzenie 2.4 *Jeżeli* $\circ$ *jest działaniem łącznym na K to dla dowolnych* $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ $(...((a_1 \circ a_2) \circ ...a_{n-1}) \circ a_n = a_1 \circ a_2 \circ ...a_{n-1} \circ a_n$ *z dowolnie rozstawionymi nawiasami.*

Dowód:
Dowód przez indukcję względem n.

1^0 Jeżeli n= 1 lub 2 to twierdzenie jest oczywiste.

2^0 Dla n = 3 teza jest równoważna warunkowi łączności.

3^0 Krok indukcyjny. Zakładamy, że $n > 3$ i każdy iloczyn mniej niż n elementów nie zależy od rozstawienia nawiasów.

Badamy $L = a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ ... \circ a_{n-1} \circ a_n$. Przypuśćmy, że ostatnie wykonywane działanie występuje po a_i.

$L = (a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ ... \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ ... \circ a_{n-1} \circ a_n)$. Teraz may dwa przypadki:

$3a^0$ $i = n-1$. Na mocy założenia indukcyjnego $a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ ... \circ a_{n-1} = (...((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ ... \circ a_{n-1})$ więc $L = (...((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ ... \circ a_{n-1}) \circ a_n$

$3b^0$ $i < n-1$ W tym przypadku z założenia indukcyjnego
$a_{i+1} \circ ... \circ a_{n-1} \circ a_n = (a_{i+1} \circ ... \circ a_{n-1}) \circ a_n$ i
$L = (a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ ... \circ a_i) \circ ((a_{i+1} \circ ... \circ a_{n-1}) \circ a_n)$. Stosując warunek łączności do wyrażeń w nawiasach otrzymujemy
$L = ((a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ ... \circ a_i) \circ (a_{i+1} \circ ... \circ a_{n-1})) \circ a_n$ i teraz teza wynika z $3a^0$.

$\square$

Definicja 2.5 *Ciałem liczb zespolonych nazywamy zbiór* $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *par liczb rzeczywistych oznaczanych jako:* $\mathbb{C} = \{\ a + bi |\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ *z działaniami:*

$$(a + bi) \overset{df}{+} (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) \overset{df}{\cdot} (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Definicja 2.6 *Niech* $z = a + bi$ *będzie liczbą zespoloną.*

Częścią rzeczywistą z *nazywamy liczbę* $Re(z) = a$.

Częścią urojoną z *nazywamy liczbę* $Im(z) = b$.

Modułem liczby z *nazywamy odległość* z *od 0 czyli liczbę* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Argumentem niezerowej liczby z *nazywamy kąt między osią rzeczywistą a wektorem* $\overrightarrow{0z}$. *Postacią trygonometryczną jest zapis* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *gdzie* $r = |z|$ *i* $\varphi = Arg(z)$ *nazywamy argumentem liczby* z.

Sprzężeniem liczby $z = a + bi$ *nazywamy liczbę* $\overline{z} = a - bi$.

Twierdzenie 2.7 *Dla dowolnych liczb zespolonych* z *i* s *zachodzą wzory:*

a) $Re(z + s) = Re(z) + Re(s)$, $\quad Im(z + s) = Im(z) + Im(s)$, $\overline{z + s} = \overline{z} + \overline{s}$.

b) $\overline{z \cdot s} = \overline{z} \cdot \overline{s}$, $\quad |z \cdot s| = |z| \cdot |s|$, $\quad Arg(z \cdot s) = Arg(z) + Arg(s) (mod\ 2\pi)$.

c) $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot s(\cos\beta + i\sin\beta) = rs(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta))$

Twierdzenie 2.8 *wzory de Moivre'a*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Wykład 3

Twierdzenie 3.1 *Składanie funkcji jest łączne.*

Twierdzenie 3.2
Niech $h_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *będzie jednokładnością o środku* 0 *i skali* r *zaś* $\phi_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *będzie obrotem względem* 0 *o kąt* α *Wówczas przekształcenia typu* h_r *i* ϕ_α *są parami przemienne.*

Ponadto: Niech $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \in \mathbb{C}$ *i* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *będzie określone wzorem* $f(z) = az$. *Wówczas* $f = h_r \circ \phi_\alpha$.

Wniosek 3.3 *Mnożenie liczb zespolonych jest przemienne i łączne.*

Twierdzenie 3.4 (Zasadnicze twierdzenie Algebry.) *Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych stopnia* ≥ 1 *ma pierwiastek.*

Twierdzenie 3.5 *Wielomiany nad ciałem można dzielić z resztą.*

Twierdzenie 3.6 (Bezoute'a.) *Liczba* z *jest pierwiastkiem wielomianu* $w(x)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian* $(x - z)$ *dzieli* $w(x)$

Wniosek 3.7 *Niech* $w(x) \in K[x]$ *będzie wielomianem o współczynnikach z ciała* K. *Wówczas liczba pierwiastków z ciała* K *jest nie większa niż stopień wielomianu.*

Twierdzenie 3.8 *Wielomiany o współczynnikach zespolonych rozkładają się na iloczyn wielomianów stopnia 1.*

Twierdzenie 3.9 *Wielomiany o współczynnikach rzeczywistych rozkładają się na iloczyn wielomianów stopnia* ≤ 2.

Definicja 3.10 *Pierwiastkiem pierwotnym stopnia* n *z 1 nazywamy liczbę* $\varepsilon_n = (\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})$ *lub jej* k*-tą potęgę* $\varepsilon_n^k = (\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n})$, *gdzie* k *jest względnie pierwsze z* n.

Twierdzenie 3.11 *Jeżeli* $a \neq 0$ *to równanie* $x^n = a$ *ma w liczbach zespolonych dokładnie* n *różnych rozwiązań różniących się o potęgę pierwiastka pierwotnego z 1. Dokładniej: jeżeli* $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *to rozwiązania równania* $x^n = a$ *są postaci* $x_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n})\varepsilon_n^k$

Przykład 3.12 $x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1)$

Twierdzenie 3.13 $|z|^2 = z\overline{z}$.

Algorytm szukania pierwiastków stopnia 2 :
$x^2 = a + bi$
$x = p + qi$
$p^2 - q^2 + 2pqi = a + bi$
I rozwiązujemy układ równań:
$$\begin{cases} 2pq = b \\ p^2 - q^2 = a \\ p^2 + q^2 = |x|^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}.$$
Algorytm rozwiązywania równań stopnia 2 :
$ax^2 + bx + c = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\sqrt{\Delta}$ dowolne rozwiązanie równania $x^2 = \Delta$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Wykład 4

Przestrzenie liniowe.

Definicja 4.1 *Niech K będzie ciałem. Przestrzenią liniową V nad ciałem K nazywamy strukturę algebraiczną (algebrę)*
$\mathbf{V} = \{V; \theta, +, \cdot\}$, *w której: V jest zbiorem z wyróżnionym elementem θ oraz dwoma działaniami $+$ i $\cdot$ zwanymi dodawaniem i mnożeniem przez liczby. Elementy V nazywamy wektorami. Dodawanie przyporządkowuje parze wektorów wektor zaś mnożenie liczbie i wektorowi wektor.*
$+ : V \times V \to V$, $\alpha + \beta \in V$.
$\cdot : K \times V \to V$, $a \cdot \alpha \in V$.
W przestrzeni liniowej działania spełniają następujące warunki zwane aksjomatami przestrzeni: Dla każdych $\alpha, \beta, \gamma \in V$ i $a, b \in K$

1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	*łączność dodawania*
2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$	*przemienność dodawania*
3) $\theta + \alpha = \alpha + \theta = \alpha$	*θ jest elementem neutralnym dodawania*
4) $\forall_{\alpha \in V}\ \exists_{\gamma \in V}\ \alpha + \gamma = \theta$	*istnienie elementu przeciwnego*
5) $a \cdot (\alpha + \beta) = (a \cdot \alpha) + (a \cdot \beta)$	*rozdzielność mnożenia względem dodawania*
6) $(a + b) \cdot \alpha = a \cdot \alpha + b \cdot \alpha$	*rozdzielność mnożenia względem dodawania*
7) $(ab) \cdot \alpha = a \cdot (b \cdot \alpha)$	*łączność mnożenia*
8) $1 \cdot \alpha = \alpha$	*1 jest elementem neutralnym mnożenia*

Twierdzenie 4.2 *Ciało ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej nad swoim podciałem.*

Podstawowe własności przestrzeni liniowych:
1) $a \cdot \alpha = \theta \Leftrightarrow a = 0$ lub $\alpha = \theta$
2) $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot x = \beta$ ma jedno rozwiązanie.
3) $\alpha + \beta = \theta \Leftrightarrow \beta = (-1)\alpha$.

Twierdzenie 4.3 *Niech W będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś X zbiorem. Wówczas $V = W^X$ zbiór wszystkich funkcji z X do W jest przestrzenią liniową z działaniami:*

$(f+g)(x) \overset{df}{=} f(x)+g(x)$ *i*

$(rf)(x) \overset{df}{=} r(f(x))$.

Wniosek 4.4 *Ciągi K^n i macierze K^n_t z działaniami po współrzędnych są przestrzeniami liniowymi.*

Definicja 4.5 *Niech V przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór $W \subset V$ nazywamy podprzestrzenią jeżeli:*

1) jest niepusty

2) jest zamknięty na działania $+$ oraz $\cdot$.

Twierdzenie 4.6 *Podprzestrzeń jest przestrzenią.*

Twierdzenie Zbiór rozwiązań układu równań liniowych nad ciałem K jest podprzestrzenią K^n wtedy i tylko wtedy, gdy układ jest jednorodny.

Twierdzenie 4.7 *Jeżeli $\{W_i \mid i \in I\}$ jest zbiorem podprzestrzeni to $\bigcap\limits_{i\in I} W_i$ też jest podprzestrzenią.*

Definicja 4.8 *Niech $X \subset V$ będzie podzbiorem przestrzeni. Symbolem*

$$lin(X) = \bigcap_{\substack{X \subset W, \\ W \text{ podprzestrzeń}}} W$$

oznaczać będziemy przestrzeń rozpiętą przez X.

Przykład 4.9

1) Jeżeli $X \subset V$ jest podprzestrzenią to $lin(X) = X$.

2) $lin(\emptyset) = \{\theta\}$.

Definicja 4.10 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór $B \subset V$ nazywamy bazą przestrzenią V jeżeli jest minimalnym podzbiorem rozpinającym V. To znaczy:*

1) $\operatorname{lin} B = V$.

2) $\forall_{\alpha\in B} \ \operatorname{lin}(\ B \setminus \{\alpha\}) \neq V$.

Definicja 4.11 *Niech V przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in V$. Kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ o współczynnikach $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ nazywamy wektor $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = \sum_{i=1}^n \ a_i\alpha_i$.*

Twierdzenie 4.12 *Jeżeli $X \neq \emptyset$ to $Lin(X)$ jest zbiorem kombinacji liniowych wektorów z X.*

Przykład 4.13 *Bazą przestrzeni K^n nad K jest zbiór:*
$B = \{e_1 = (1,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,0,1)\}$. Baza ta zwana jest bazą standardową.

Wykład 5

Definicja 5.1 *Niech V przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór $X \subset V$ nazywamy liniowo niezależnym jeżeli dla każdego ciągu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ różnych wektorów z X jedynym rozwiązaniem równania $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = \theta$ jest $x_1 = 0 = x_2 = ... = x_n$.*

Uwaga. Jeżeli $X = \emptyset$ to X jest liniowo niezależny i $\operatorname{lin} X = \{\theta\}$.

Stwierdzenie 5.2 *Podzbiór $X \subset V$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór X jest liniowo niezależny.*

Lemat 5.3 *Niech $X \subset V$ będzie zbiorem liniowo niezależnym zaś $\alpha \in V \setminus X$, wówczas zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \notin \operatorname{lin} X$.*

Twierdzenie 5.4 *Niech B będzie uporządkowanym podzbiorem przestrzeni liniowej V. Wówczas równoważne są warunki:*
1) B jest bazą.
2) B jest zbiorem liniowo niezależnym rozpinającym V.
3) B jest maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym w V.
4) Każdy wektor z V można jednoznacznie zapisać jako kombinacje liniową wektorów z B.

Twierdzenie 5.5 *Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ będzie skończonym zbiorem zaś K ciałem. Wówczas jedną z baz przestrzeni V wszystkich funkcji z w K jest zbiór $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, gdzie e_j jest funkcją określoną wzorem:*

$$e_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} .$$

Przykład 5.6 *Bazą przestrzeni macierzy K_t^n nad K jest zbiór $B = \{e_{i,j} \mid i = 1, 2, \ldots, t,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, gdzie $e_{i,j}$ jest macierzą mającą same zera z wyjątkiem jedynki w i-tym wierszu i j-tej klolumnie. Elementy tej bazy nazywamy jedynkami macierzowymi.*

Twierdzenie 5.7 *Każda przestrzeń ma bazę.*

Dowód:
Jak pokazał A.R. Blass w 1984 r.[1] twierdzenie to jest równoważne pewnikowi wyboru. W dowodzie oprzemy się na twierdzeniu Zermelo mówiącym, że każdy zbiór można dobrze uporządkować.

Ustawmy elementy przestrzeni V w dobrze uporządkowany ciąg pozaskończony

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

[1] Np. A.Błaszczak, S. Turek Teoria mnogości. Twierdzenie 16.5

Wyznacza on ciąg podzbiorów

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$$

zdefiniowanych $X_i = \{\alpha_j \mid j < i\}$ i ciąg podprzestrzeni

$$A_1 = \operatorname{lin} X_1 \subseteq A_2 = \operatorname{lin} X_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n = \operatorname{lin} X_n \subseteq \ldots$$

Indukcyjnie określamy ciąg

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$$

przyjmując: $\beta_n = \begin{cases} \alpha_n, & \alpha_n \notin A_n \\ \theta, & \alpha_n \in A_n \end{cases}$. Oczywiście $\beta_1 = \alpha_1$.

Niech Y będzie zbiorem niezerowych wektorów z ciągu (β_n). Pokażemy, że Y jest bazą. Niech $Y_i = \{\beta_j \mid j < i\}$ i $B_i = \operatorname{lin} Y_i$.

i) $\operatorname{lin} B = \bigcup_i B_i \subseteq \bigcup_i A_i = V$. Wystarczy zatem pokazać, że $\forall_i\ B_i = A_i$. Przypuśćmy, że to nieprawda. Istnieje wówczas najmniejsza liczba porządkowa j dla której $B_j \neq A_j$. Oczywiście $j \neq 1$ bo $B_1 = \{\theta\} = A_1$.

ia) Jeżeli $j = n+1$ to $X_j = X_n \cup \{\alpha_n\}$ i $Y_j = Y_n \cup \{\beta_n\}$. Ale z minimalności j, $A_n = \operatorname{lin} X_n = \operatorname{lin} Y_n = B_n$. Stąd $\alpha_n \neq \beta_n$ co daje $\alpha_n \in A_n$. Teraz $A_j = A_n = B_n \subset B_j$ - sprzeczność.

ib) Jeżeli j jest liczbą graniczną to:

$X_j = \bigcup_{i<j} X_i$ i $A_j = \bigcup_{i<j} A_i = \bigcup_{i<j} B_i \subset B_j$ - sprzeczność.

ii) Liniowa niezależność. Niech $a_1\beta_{i_1} + a_n\beta_{i_n} + \ldots + a_n\beta_{i_n} = \theta$, gdzie $\beta_{i_j} \in B$, $i_1 < \beta_{i_n} < \ldots < i_n$ oraz $a_n \neq 0$. Teraz $\beta_{i_n} \in B_n = A_n$, ale $\beta_{i_n} = \alpha_{i_n}$ a skoro $\alpha_{i_n} \in A_n$ to $\beta_{i_n} = \theta$ - sprzeczność.

□

Uwaga. Bez założenia pewnika wyboru można udowodnić, że przestrzeń rozpięta przez przeliczalny zbiór wektorów (lub dobrze uporządkowany zbiór wektorów) ma bazę. Przechodzi analogiczny dowód.

Lemat 5.8 (Steinitza) *Niech $B = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Niech $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ będzie ciągiem liniowo niezależnym. Wówczas:*

1) $t \leq n$.

2) Ciąg $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ można uzupełnić do n-elementowej bazy przestrzeni V pewnymi wektorami z B.

Definicja 5.9 *Wymiarem przestrzeni V nad K nazywamy moc dowolnej bazy i oznaczamy* $\mathbf{dim_K V}$ *lub* $\mathbf{dim V}$.

Twierdzenie 5.10 *Dowolne dwie bazy przestrzeni V są równoliczne.*

Dowód tylko w przypadku przestrzeni skończenie generowanych.

Twierdzenie 5.11 *Niech W będzie podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni V. Wówczas $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$.*

Twierdzenie 5.12 *Niech $W \subset V$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami nad ciałem K. Wówczas $W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$.*

Definicja 5.13 *Niech A i B będą podprzestrzeniami V nad ciałem K. Sumą przestrzeni A i B nazywamy zbiór $A + B = \{\alpha + \beta;\ \alpha \in A, \beta \in B\}$.*

Twierdzenie 5.14 $A + B = \operatorname{lin}(A \cup B)$.

Twierdzenie 5.15 $\dim A + \dim B = \dim(A + B) + \dim(A \cap B)$.

Definicja 5.16 *Niech A i B będą podprzestrzeniami V nad ciałem K. Powiemy, że V sumą prostą przestrzeni A i B gdy:*
1) $V = A + B$
2) $A \cap B = \{\theta\}$,
i oznaczamy $V = A \oplus B$.
Podprzestrzenie A i B nazywamy składnikami prostymi V.

Wykład 6

Definicja 6.1 *Niech $\{A_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V nad ciałem K. Powiemy, że V jest sumą prostą rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$,*
co oznaczamy $V = \bigoplus_{i\in I} A_i$ gdy:

1) $V = \operatorname{lin}\bigcup_{i\in I} A_i$. $(V = +_{i\in I} A_i)$.

2) $\forall_{i\in I}\ A_i \cap \operatorname{lin}\bigcup_{j\in I\setminus\{i\}} A_j = \{\theta\}$.

Twierdzenie 6.2 *$V = \bigoplus_{i\in I} A_i$ jest sumą prostą rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ wtedy i tylko wtedy gdy każdy element z V można jednoznacznie przedstawić jako sumę (skończoną) elementów z różnych podprzestrzeni A_i.*

Twierdzenie 6.3 *Każdy zbiór liniowo niezależny w przestrzeni liniowej V nad ciałem K można uzupełnić do bazy.*

Twierdzenie 6.4 *Każda podprzestrzeń jest składnikiem prostym.*

Twierdzenie 6.5 *V jest przestrzenią nierozkładalną $\Leftrightarrow$ $\dim V = 1$ lub $\dim V = 0$.*

Lemat 6.6

Niech $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie ciągiem wektorów z przestrzeni V. Niech $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ będzie ciągiem powstałym z $\mathscr{A}$ przez operacje elementarne. Wówczas:
1) $\operatorname{lin}\mathscr{A} = \operatorname{lin}\mathscr{B}$.
2) Ciąg $\mathscr{A}$ jest liniowo niezależny $\Leftrightarrow$ ciąg $\mathscr{B}$ jest liniowo niezależny,
3) Ciąg $\mathscr{A}$ jest bazą V $\Leftrightarrow$ ciąg $\mathscr{B}$ jest bazą V.

Lemat 6.7 *Niech* $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *będzie ciągiem wektorów z przestrzeni* K^t. *Zapisujemy te wektory w postaci macierzy* $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in K^t_n$.
Jeżeli macierz M *jest w postaci schodkowej to niezerowe wektory z ciągu* $\mathscr{A}$ *tworzą zbiór liniowo niezależny*

.

Algorytm szukania bazy przestrzeni $\operatorname{lin}\mathscr{A}$.
1) Zapisujemy ciąg $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ w postaci macierzy M.
2) Operacjami elementarnymi sprowadzamy M do postaci schodkowej.
3) Niezerowe wiersze otrzymanej macierzy tworzą bazę $\operatorname{lin}\mathscr{A}$.

Wykład 7

Definicja 7.1 *Niech* V *i* W *będą przestrzeniami nad tym samym ciałem* K. *Przekształcenie* $f : V \to W$ *nazywamy liniowym jeżeli zachowuje działania. To znaczy:*
1) $f(\theta_V) = \theta_W$.
2) $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$.
3) $\forall_{\alpha\in V}\ \forall_{r\in K}\ \ f(r\alpha) = rf(\alpha)$.

Twierdzenie 7.2 *Niech* $f : V \to W$ *będzie przekształceniem Przestrzeni liniowych nad tym samym ciałem* K. *Wówczas równoważne są warunki:*
1) f *jest przekształceniem liniowym.*
2) f *zachowuje kombinacje liniowe.*
3) $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ \forall_{r,s\in K}\ \ f(r\alpha + s\beta) = rf(\alpha) + sf(\beta)$.

Przykład 7.3 *Przykładami przekształceń liniowych są:*
1) Homotetie: $f_r(\alpha) = r\alpha$.
2) Symetria względem podprzestrzeni A *wzdłuż podprzestrzeni* B.
3) Rzut na podprzestrzeń A *wzdłuż podprzestrzeni* B.
4) Obrót płaszczyzny R^2 *o kąt* ϕ *wokół zera :*
$f(x, y) = (x\cos\phi - y\sin\phi, x\sin\phi + y\cos\phi)$.

Definicja 7.4 *Niech* $f : V \to W$ *będzie przekształceniem liniowym.*
1) Zbiór $\operatorname{im} f = \{f(\alpha)\ ;\ \alpha \in V\}$ *nazywamy obrazem* f.
2) Zbiór $\ker f = \{\alpha \in V\ ;\ f(\alpha) = \theta\}$ *nazywamy jądrem* f.

Twierdzenie 7.5
$\operatorname{im} f$ *jest podprzestrzenią* W *zaś* $\ker f$ *jest podprzestrzenią* V.

Twierdzenie 7.6 *Przekształcenie liniowe* f *jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy gdy* $\ker f = \{\theta\}$.

Definicja 7.7 *Różnowartościowe przekształcenie liniowe $f : V \to W$ nazywamy monomorfizmem lub injekcją.*

Przekształcenie liniowe $f : V \to W$ nazywamy epimorfizmem lub surjekcją gdy jest "na".

Przekształcenie liniowe $f : V \to W$ nazywamy izomorfizmem gdy jest równocześnie monomorfizmem i epimorfizmem, czyli różnowartościowe i "na".

Przestrzenie liniowe V i W nad ciałem K nazywamy izomorficznymi gdy istnieje izomorfizm $f : V \to W$.

Lemat 7.8 *Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Bazę $(\alpha_1, \alpha_2, ...)$ przestrzeni $\ker f$ uzupełniamy do bazy przestrzeni V wektorami $(\beta_1, \beta_2, ...)$.*

Wówczas ciąg wektorów $(f(\beta_1), f(\beta_2), ...)$ jest liniowo niezależny w przestrzeni W.

Dowód:

Niech $\sum_{i=1}^{n} a_i f(\beta_i) = \theta$. Wtedy $f\big(\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i\big) = \theta$, $\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i \in \ker f$ i stąd $a_1 = 0 = a_2 = ... = a_n$.

$\square$

Twierdzenie 7.9 *Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.*

Wówczas $\dim V = \dim \ker\ f + \dim \mathrm{im}\ f$.

Twierdzenie 7.10 *Każde przekształcenie liniowe jest jednoznacznie określone na bazie. To znaczy: jeżeli $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ jest bazą V zaś $\{\beta_i\}_{i \in I}$ jest zbiorem wektorów z przestrzeni W to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $f : V \to W$ spełniające warunek $\forall_{i \in I}\ f(\alpha_i) = \beta_i$.*

Przykład 7.11 *Niech $f : R^n \to R^s$ oraz w bazie standardowej $\forall_{1 \leq i \leq n}\ f(e_i) = (a_{1,i}, a_{2,i}, ..., a_{n,i})$. Wówczas*
$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i (a_{1,i}, a_{2,i}, ..., a_{n,i}) =$
$(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n,\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n,\ ...,$
$a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + ... + a_{s,n}x_n)$.

Powyższy wzór nazywamy **wzorem analitycznym** *przekształcenia.*

Twierdzenie 7.12 *Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.*

Wówczas równoważne są warunki:

a) f jest izomorfizmem.

b) Istnieje taka baza uporządkowana $\mathcal{B}$ przestrzeni V, że jej obraz $f(\mathcal{B})$ jest uporządkowaną bazą przestrzeni W.

c) Dla każdej bazy uporządkowanej $\mathcal{B}$ przestrzeni V, że jej obraz $f(\mathcal{B})$ jest uporządkowaną bazą przestrzeni W.

Wniosek 7.13 *Przestrzenie liniowe V i W nad ciałem K są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy* $\dim V = \dim W$.

Wykład 8

Bazy przestrzeni przekształceń

Definicja 8.1 *Niech V i W będą przestrzeniami nad tym samym ciałem K. Symbolem $L(V;W)$ oznaczamy zbiór przekształceń liniowych z V w W.*

Twierdzenie 8.2 *Zbiór $L(V;W)$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczby jest przestrzenią liniową.*

Twierdzenie 8.3 *Niech układ $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V nad ciałem K zaś $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s)$ będzie bazą przestrzeni W nad tym samym ciałem K. Wówczas zbiór przekształceń $\{f_{i,j}\}_{1\leq i\leq s,\, 1\leq j\leq n}$ jest bazą $L(V,W)$, Gdzie $f_{i,j}$ określamy na bazie w następujący sposób:*

$$f_{i,j}(\alpha_t) = \begin{cases} \theta & j \neq t \\ \beta_i & j = t \end{cases}.$$

Wniosek 8.4

Jeżeli $\dim V < \infty$ *i* $\dim W < \infty$ *to* $\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

Uwaga Twierdzenie 8.3 pozostaje prawdziwe gdy baza $\mathscr{A}$ jest skończona zaś baza $\mathscr{B}$ ma dowolną moc. W przypadku nieskończonego wymiaru V wymiar przestrzeni $L(V,W)$ ekstremalnie rośnie. Np. gdy $\dim W < \infty$ to $\dim L(V,W) = |W|^{\dim V}$.

Definicja 8.5 *Niech układ $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V nad ciałem K zaś $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s)$ będzie bazą przestrzeni W nad tym samym ciałem K.*

Macierzą przekształcenia

$f \in L(V,W)$ *nazywamy macierz* $M(f)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}$,

gdzie $f = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_{i,j}$ *jest zapisane w bazie* $\{f_{i,j}\}_{i=1}^{s}\,{}_{j=1}^{n}$.

$$\left(f_{i,j}(\alpha_t) = \begin{cases} \theta & j \neq t \\ \beta_i & j = t \end{cases} \right).$$

Wniosek 8.6 *Przekształcenie $f : R^n \to R^s$ ma wzór analityczny $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1.n}x_n,\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2.n}x_n,\ ...,\ a_{s,1}x_1 + a_{s,2}x_2 + ... + a_{s.n}x_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy jego macierzą w bazach standardowych jest*

$$M(f) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 8.7 *Niech układ $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V nad ciałem K zaś $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$ będzie bazą przestrzeni W nad tym samym ciałem K. Wówczas przekształcenie $\Psi : L(V, W) \to K_t^n$ określone wzorem $\Psi(f) = M(f)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.*

Twierdzenie 8.8 *(Tw. 3.1) Składanie przekształceń jest łączne.*

Twierdzenie 8.9 *Niech V, W i T będą podprzestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $f \in L(V, W)$ i $g \in L(T, V)$ wówczas $f \circ g \in L(T, W)$.*
(Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.)

Twierdzenie 8.10 *Niech V, W i T będą podprzestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Składanie przekształceń liniowych ma następujące własności:*
1) $\forall_{f \in L(V,W)} \forall_{g \in L(T,V)} \forall_{r \in K}\ r(g \circ f) = (rg) \circ f = g \circ (rf)$.

2) $\forall_{f_1, f_2 \in L(V,W)} \forall_{g \in L(T,V)} \forall_{r_1, r_2 \in K}$
$g \circ (r_1 f_1 + r_2 f_2) = r_1(g \circ f) + r_2(g_2 \circ f)$.

3) $\forall_{f \in L(V,W)} \forall_{g_1, g_2 \in L(T,V)} \forall_{r_1, r_2 \in K}$
$(r_1 g_1 + r_2 g_2) \circ f = r_1(g_1 \circ f_1) + r_2(g \circ f_2)$.

Definicja 8.11 *Niech A i B będą macierzami nad ciałem K, gdzie A ma n kolumn i t wierszy zaś B ma s kolumn i n wierszy. Niech $f \in L(K^n, K^t)$ i $g \in L(K^s, K^n)$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że $M(f) = A$ i $M(g) = B$ (w bazach standardowych). Iloczynem macierzy nazywamy macierz $A \cdot B = M(f \circ g)$.*

Uwaga Jeżeli liczba kolumn macierzy A jest różna od liczby wierszy macierzy B to iloczyn $A \cdot B$ nie istnieje.

Twierdzenie 8.12 *Własności mnożenia macierzy:*
1) łączność: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2) $\forall_{r \in K}\ r(A \cdot B) = (rA) \cdot B = A \cdot (rB)$
3) $\forall_{r_1, r_2 \in K}\ (r_1 A_1 + r_2 A_2) \cdot B = r_1 A_1 \cdot B + r_2 A_2 \cdot B$
4) $\forall_{r_1, r_2 \in K}\ A \cdot (r_1 B_1 + r_2 B_2) = r_1 A \cdot B_1 + r_2 A \cdot B_2$

Definicja 8.13 *Jedynkami macierzowymi nazywamy macierze $e_{i,j}$, które mają jedynkę w i-tym wierszu i j-tej kolumnie a pozostałe współczynniki zerowe.*

Twierdzenie 8.14 *Zbiór $\{e_{i,j}\}_{1 \le i \le t,\ 1 \le j \le n}$ jest bazą przestrzeni K_t^n.*

Wzory mnożenia
1) $e_{i,j} e_{k,s} = \begin{cases} \theta & j \neq k \\ e_{i,s} & j = k \end{cases}$.

2) Dla $[a_1\ a_2\ ...\ a_n] \in K_n^1$ i $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in K_1^n$

$$[a_1\ a_2\ ...\ a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n] \in K_1^1$$

3) Dla $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} \in K_t^n$ i $[k_1\ k_2\ ...\ k_s] \in K_n^s$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} \cdot [k_1\ k_2\ ...\ k_s] = \begin{bmatrix} w_1k_1 & w_1k_2 & \cdots & w_1k_s \\ w_2k_1 & w_2k_2 & \cdots & w_2k_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_tk_1 & w_tk_2 & \cdots & w_tk_s \end{bmatrix} \in K_t^s$$

Twierdzenie 8.15 *Niech układ* $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *będzie bazą przestrzeni* V *nad ciałem* K *zaś* $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$ *będzie bazą przestrzeni* W *nad tym samym ciałem* K*. Niech* $f \in L(V, W)$*. Wówczas* $M = M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(f)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_j \in V$ $f(\alpha) = \sum_{i=1}^{t} b_i\beta_i$*, gdzie* $M \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 8.16 *Niech* L *będzie układem równań liniowych o macierzy* M *i kolumnie wyrazów wolnych* $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix}$.
Niech $f : R^n \to R^t$ *będzie przekształceniem opisanym macierzą* M*. Wówczas zbiór rozwiązań układu* L *jest równy* $f^{-1}(b_1,\ b_2,\ ,...,\ b_t) =$
$= \{(x_1,\ x_2,\ ,...,\ x_n) \in R^n \mid f(x_1,\ x_2,\ ,...,\ x_n) = (b_1,\ b_2,\ ,...,\ b_t)\}$.

Wykład 9

Przykład 9.1 *Niech* V *będzie przestrzenią skończonego wymiaru i* $f \in L(V, V)$*.*

1) f *jest homotetią wtedy i tylko wtedy, gdy w każdej bazie* $\mathscr{A}$

$$M(f)^{\mathscr{A}}_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

2) f jest rzutem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza $\mathscr{A}$ taka, że

$$M(f)^{\mathscr{A}}_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3) f jest symetrią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza $\mathscr{A}$ taka, że

$$M(f)^{\mathscr{A}}_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 9.2 *Niech układ $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$ i $\mathscr{C} = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m)$ będą bazami przestrzeni A, B i C nad tym samym ciałem K, odpowiednio. Niech $f \in L(A, B)$ i $g \in L(B, C)$.*
Wówczas $M(g \circ f)^{\mathscr{C}}_{\mathscr{A}} = M(g)^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} \cdot M(f)^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}$.

Definicja 9.3 *Macierzą transponowaną do macierzy M nazywamy taką macierz M^T, w której wiersze i kolumny są zamienione rolami. To znaczy*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{s,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{s,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{s,n} \end{bmatrix}$$

Własności transpozycji:

Twierdzenie 9.4
1) $\left(M^T\right)^T = M$.
2) Niech A i B będą macierzami, których iloczyn AB jest określony. Wówczas określony jest iloczyn $B^T A^T$ i $B^T A^T = (AB)^T$

Algorytm 1 Niech $\{\alpha_i\}_{i=1,2,...,t}$ będzie zbiorem wektorów z przestrzeni R^n zaś $\{\beta_i\}_{i=1,2,...,t}$ Będzie zbiorem wektorów z przestrzeni R^s . Szukamy przekształcenia liniowego $f : R^n \to R^s$ spełniającego warunek $\forall_{i \in I}\ f(\alpha_i) = \beta_i$.

1) Budujemy macierz $M = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_t & \beta_t \end{array}\right]$

2) Sprowadzamy macierz M do postaci schodkowej zredukowanej M' przy pomocy operacji elementarnych i wykreślamy wiersze zerowe.

3) Jeżeli schodek wypadł po prawej stronie kreski to STOP takie przekształcenie nie istnieje.

4) Jeżeli z lewej strony kreski otrzymaliśmy macierz jednostkową to STOP kolejne wiersze opisują obrazy wektorów bazy standardowej zaś macierz po prawej stronie kreski jest równa $M(f)^T$.

5) (w pozostałych przypadkach) Uzupełniamy wiersze macierzy z lewej strony kreski do bazy R^n, wpisujemy z prawej strony dowolne wektory i GO TO 2).

Twierdzenie 9.5 *Każda podprzestrzeń $V \subset K^n$ jest zbiorem rozwiązań układu równań jednorodnych.*

Algorytm 2 Niech $V = \text{lin}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t\} \subset K^n$. Szukamy układu równań opisujących V.

Tak jak w algorytmie z wykładu 6 szukamy bazy V.

1) Zapisujemy ciąg $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t)$ w postaci macierzy M.

2) Operacjami elementarnymi sprowadzamy M do postaci schodkowej.

3) Niezerowe wiersze otrzymanej macierzy tworzą bazę $\mathscr{A} = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_s)$.

4) Rozszerzamy $\mathscr{A}$ do bazy K^n wektorami bazy standardowej $(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{n-s}})$.

5) Budujemy macierz $M = \left[\begin{array}{c|c} \alpha'_1 & \theta \\ \alpha'_2 & \theta \\ \vdots & \vdots \\ \alpha'_s & \theta_t \\ e_{i_1} & e_1 \\ e_{i_2} & e_2 \\ \vdots & \vdots \\ e_{i_{n-s}} & e_{n-s} \end{array}\right] \in K_n^{2n-s}$.

6) Sprowadzamy macierz M do postaci schodkowej zredukowanej $M' = [A|B]$ przy pomocy operacji elementarnych.

7) V jest zbiorem rozwiązań układu jednorodnego o macierzy B^T.

Dowód poprawności: Określamy przekształcenie f macierzą po prawej stronie kreski - $M(f) = B^T$. Ponieważ $\ker f = V$ więc V jest zbiorem rozwiązań układu jednorodnego o macierzy B^T.

Algorytm 3 Niech $f : R^n \to R^k$ będzie przekształceniem liniowym o macierzy $M \in K_k^n$ (w bazach standardowych). Szukamy baz $\ker f$ i $\text{Im} f$.

1) Budujemy macierz $A = [M^T|I]$, gdzie I jest macierzą jednostkową $n \times n$.

2) Przy pomocy operacji elementarnych sprowadzamy macierz A

do postaci schodkowej $A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_t & \beta_t \\ \theta & v_1 \\ \theta & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ \theta & v_s \end{array}\right]$, gdzie $\alpha_t \neq \theta$.

3) Wektory $\alpha_1,\ \alpha_2, ...,\ \alpha_t$ tworzą bazę $\mathrm{Im} f$ zaś $v_1,\ v_2,\ , ...,\ v_s$ bazę $\ker f$.

Algorytm 4 Rozwiązywanie układu równań liniowych jednorodnych o macierzy M.

1) Budujemy macierz $A = [M^T | I]$, gdzie I jest macierzą jednostkową $n \times n$.

2) Przy pomocy operacji elementarnych sprowadzamy macierz A

do postaci schodkowej $A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_t & \beta_t \\ \theta & v_1 \\ \theta & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ \theta & v_s \end{array}\right]$, gdzie $\alpha_t \neq \theta$.

3) Wektory $v_1,\ v_2,\ , ...,\ v_s$tworzą bazę przestrzeni rozwiązań.

Algorytm 5 Rozwiązywanie układu równań liniowych o macierzy M i kolumnie wyrazów wolnych $\beta = (b_1,\ b_2,\ , ...,\ b_k)^T$.

1) Budujemy macierz $A = \left[\begin{array}{c|c} M^T & I \\ \hline -\beta & \theta \end{array}\right]$

2) Przy pomocy operacji elementarnych na macierzy A sprowadzamy macierz $\left[\begin{array}{c|} M^T \\ \hline -\beta \end{array}\right]$ do postaci schodkowej. Przy czym wiersza pod kreską nie dodajemy do żadnego innego oraz nie zamieniamy z innymi miejscami.

Otrzymujemy: $\left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_t & \beta_t \\ \theta & v_1 \\ \theta & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ \theta & v_s \\ \hline \beta' & w \end{array}\right]$, gdzie $\alpha_t \neq \theta$.

3) Jeżeli $\beta' \neq \theta$ to STOP układ równań sprzeczny.

4) Jeżeli $\beta' = \theta$ to zbiorem rozwiązań jest $w + \text{lin}\{v_1,\ v_2,\ ,...,\ v_s\}$. Ponadto wektory $v_1,\ v_2,\ ,...,\ v_s$ są liniowo niezależne.

Algorytm 7 Rozwiązywanie równania macierzowego $MX = B$.

1) Budujemy macierz $A = \left[\begin{array}{c|c} M^T & I \\ \hline -B^T & 0 \end{array}\right]$

2) Przy pomocy operacji elementarnych na wierszach macierzy A sprowadzamy macierz $\left[\begin{array}{c|} M^T \\ \hline -B^T \end{array}\right]$ do postaci schodkowej. Przy czym wierszy pod kreską nie dodajemy do żadnego innego oraz nie zamieniamy z innymi miejscami.

Otrzymujemy: $\left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_t & \beta_t \\ \theta & v_1 \\ \theta & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ \theta & v_s \\ \hline B' & D \end{array}\right]$, gdzie $\alpha_t \neq \theta$.

3) Jeżeli $B' \neq [0]$ to STOP równanie sprzeczne.

4) Jeżeli $B' = [0]$ to zbiorem rozwiązań jest $D^T + E$, gdzie kolumny macierzy E należą do przestrzeni $\text{lin}\{v_1,\ v_2,\ ,...,\ v_s\}$. Ponadto wektory $v_1,\ v_2,\ ,...,\ v_s$ są liniowo niezależne.

Dowód poprawności: Wiersze macierzy są postaci $[f(w)|w]$ a pod kreską $[f(w) - \beta|w]$ i to się nie zmienia przy operacjach elementarnych.

Układ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy kolumny macierzy B (wiersze macierzy B^T) należą do przestrzeni $Lin\{\alpha_1,\ \alpha_2, ...,\ \alpha_t\}$.

Wykład 10

Definicja 10.1 *Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowych nad ciałem K. Rzędem przekształcenia f nazywamy liczbę $r(f) = \dim \text{Im} f$.*

Rzędem macierzy $M \in K_t^n$ nazywamy rząd przekształcenia $f \in L(K^n, K^t)$ opisanego macierzą M w bazach standardowych i oznaczamy $r(M)$.

Rzędem kolumnowym macierzy $M \in K_t^n$ nazywamy liczbę $k(M) = \dim\ lin\{k_1, k_2, ..., k_n\}$, gdzie k_j są kolumnami macierzy M.

Rzędem wierszowym macierzy $M \in K_t^n$ nazywamy liczbę $w(M) = \dim\ lin\{w_1, w_2, ..., w_t\}$, gdzie w_i są wierszami macierzy M.

Stwierdzenie 10.2 *Niech* $M = [k_1\, k_2 \ldots k_n] \in K^n_t$ *będzie macierzą o* n *kolumnach. Wówczas* $r(M) = \dim \mathrm{lin}\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} = k(M)$.

Stwierdzenie 10.3 *Niech* M *będzie macierzą w postaci schodkowej zredukowanej. Wówczas:*
$r(M) = \dim \mathrm{lin}\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} = \dim \mathrm{lin}\{w_1, w_2, \ldots, w_t\} =$ *liczba schodków.*

Stwierdzenie 10.4 *Macierz* $A \in K^n_n$ *jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $r(A) = n$.

Twierdzenie 10.5 *Kroneckera - Capelliego.*

Niech L *będzie układem równań liniowych o* n *niewiadomych opisanych macierzą* $M(L)$. *Wówczas:*

1) Układ L *ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy* $r(M(L)) = r(M(L)_u)$.

2) Jeżeli układ L *jest jednorodny to zbiór jego rozwiązań jest podprzestrzenią* K^n *wymiaru* $n - r(M(L))$.

3) Jeżeli układ L *ma rozwiązanie to wymiar rozwiązań jest równy* $n - r(M(L))$. *To znaczy: Zbiór rozwiązań jest postaci* $Z = \alpha + V$, *gdzie* V *jest przestrzenią wymiaru* $n - r(M(L))$.

Twierdzenie 10.6 *Niech* $g \in L_K(V_1, V_2)$ *i* $f \in L_K(V_2, V_3)$.
Wówczas $r(f \circ g) \leq Min\{r(f), r(g)\}$. *Ponadto:*

a) Jeżeli g *jest epimorfizmem to* $r(f \circ g) = r(f)$.

b) Jeżeli f *jest monomorfizmem to* $r(f \circ g) = r(g)$.

Wniosek 10.7 *Niech* $g \in L_K(V_1, V_2)$, $f \in L_K(V_2, V_3)$ *i* $h \in L_K(V_3, V_4)$.
Jeżeli g *i* h *są izomorfizmami to* $r(f) = r(f \circ g) = r(h \circ f) = r(h \circ f \circ g)$.

Twierdzenie 10.8 *Niech* $A \in K^n_t$ *i* $B \in K^n_s$. *Wówczas* $r(AB) \leq Min\{r(A), r(B)\}$.

Twierdzenie 10.9 *Niech* $A \in K^n_t$, $B \in K^n_n$ *i* $C \in K^t_t$. *Jeżeli macierze* B *i* C *są odwracalne to* $r(A) = r(AB) = r(CA) = r(CAB)$.

Zadanie 1 *Niech* $A \in K^n_t$ *i* $B \in K^n_s$. *Udowodnij, że:*

a) Jeżeli $r(A) = n$ *to* $r(AB) = r(B)$.

b) Jeżeli $r(B) = n$ *to* $r(AB) = r(A)$.

Twierdzenie 10.10 *Niech* $f \in L_K(V, W)$ *będzie określone macierzą* $M(f)^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}$ *w bazach* $\mathscr{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *i* $\mathscr{B} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$.

Wówczas $r(f) = r\left(M(f)^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}\right)$.

Rząd macierzy a operacje elementarne.

Definicja 10.11 *Macierzą elementarną nazywamy macierz kwadratową* $E_{i,j}(r) = I + re_{i,j} \in K^n_n$, *gdzie* $i \neq j$ *oraz* I *jest macierzą jednostkową. To znaczy macierz mającą jedynki na przekątnej,* r *w miejscu* i, j *a w pozostałych miejscach zera.*

Twierdzenie 10.12 *Niech $A \in K^s_n$, $B \in K^n_t$ i $E_{i,j}(r) \in K^n_n$ będą macierzami. Wówczas:*

1) $E_{i,j}(c)A$ powstaje z macierzy A przez dodanie j-tego wiersza pomnożonego przez skalar c do wiersza i-tego.

2) $BE_{i,j}(c)$ powstaje z macierzy B przez dodanie i-tej kolumny pomnożonej przez skalar c do j-tej kolumny.

Wniosek 10.13 *Rząd macierzy nie zmienia się przy operacjach elementarnych typu (1) na wierszach bądź kolumnach.*

Definicja 10.14 *Niech σ będzie permutacją zbioru $\{1, 2, ..., n\}$. Macierzą permutacyjną nazywamy macierz kwadratową $M_\sigma = \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i),i} \in K^n_n$.*

Twierdzenie 10.15 *Niech $A \in K^s_n$, $B \in K^n_t$ i $M_\sigma \in K^n_n$ będą macierzami. Wówczas:*

1) $M_\sigma A$ powstaje z macierzy A przez permutacje wierszy permutacją σ^{-1}. Dokładniej $M_\sigma \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{\sigma^{-1}(1)} \\ w_{\sigma^{-1}(2)} \\ \vdots \\ w_{\sigma^{-1}(n)} \end{bmatrix}$

2) BM_σ powstaje z macierzy B przez przez permutacje wierszy permutacją σ. Dokładniej $[k_1\, k_2 \dots k_n]M_\sigma = [k_{\sigma(1)}\, k_{\sigma(2)} \dots k_{\sigma(n)}]$

Dowód:

Ad 1)

Niech $A = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^s a_{p,q} e_{p,q}$, Wtedy

$M_\sigma A = \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i),i} \left(\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^s a_{p,q} e_{p,q} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^s a_{p,q} e_{\sigma(i),i} e_{p,q} = \sum_{i=1}^n \sum_{q=1}^s a_{i,q} e_{\sigma(i),i} e_{i,q}$. Przyjmijmy $j = \sigma(i)$ czyli $i = \sigma^{-1}(j)$. Teraz:

$M_\sigma A = \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^s a_{\sigma^{-1}(j),q} e_{j,\sigma^{-1}(j)} e_{\sigma^{-1}(j),q} = \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^s a_{\sigma^{-1}(j),q} e_{j,q}$.

Ad 2)

Niech $B = \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^n b_{p,q} e_{p,q}$, Wtedy

$BM_\sigma = \left(\sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^n b_{p,q} e_{p,q} \right) \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i),i} = \sum_{p=1}^t \sum_{q=1}^n \sum_{i=1}^n b_{p,q} e_{p,q} e_{\sigma(i),i} = \sum_{p=1}^t \sum_{i=1}^n b_{p,\sigma(i)} e_{p,\sigma(i)} e_{\sigma(i),i} = \sum_{p=1}^t \sum_{i=1}^n b_{p,\sigma(i)} e_{p,i}$.

□

Wniosek 10.16 *Rząd macierzy nie zmienia się przy operacjach elementarnych typu (2) na wierszach bądź kolumnach.*

Definicja 10.17 *Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową* $\mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{i=1}^n a_i e_{i,i}$.

Twierdzenie 10.18 *Niech* $A \in K^s_n$, $B \in K^n_t$ *i* $\operatorname{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$ *będą macierzami. Wówczas:*

1) $\operatorname{diag}(a_1, a_2, ..., a_n) \cdot A$ *powstaje z macierzy* A *przez pomnożenie kolejnych wierszy przez skalary* a_i.

2) $B \cdot \operatorname{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$ *powstaje z macierzy* B *przez pomnożenie kolejnych kolumn przez skalary* a_i.

Wniosek 10.19 *Rząd macierzy nie zmienia się przy operacjach elementarnych typu (3) na wierszach bądź kolumnach.*

Składając te trzy rezultaty razem otrzymujemy:

Twierdzenie 10.20 *Rząd macierzy nie zmienia się przy operacjach elementarnych na wierszach bądź kolumnach.*

Twierdzenie 10.21 *Rząd kolumnowy macierzy jest równy rzędowi wierszowemu. To znaczy:*

Niech $M = [k_1\, k_2 \ldots k_n] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} \in K^n_t$ *będzie macierzą o* n *kolumnach i* t *wierszach. Wówczas:*

$r(M) = \dim \operatorname{lin}\{k_1, k_2, ..., k_n\} = \dim \operatorname{lin}\{w_1, w_2, ..., w_t\}$.

Wniosek 10.22 *Dla każdej macierzy* $r(A) = r(A^T)$.

Stwierdzenie 10.23 *Każdą macierz odwracalna jest iloczynem macierzy elementarnych* $E_{i,j}(a)$ *i macierzy diagonalnej.*

Porównaj z twierdzeniem 2.3

Algorytm 8 Odwracanie macierzy.

Niech $A \in K^n_n$ będzie macierzą.

1) Budujemy macierz $M = [A|I]$, gdzie $I \in K^n_n$ jest macierzą jednostkową.

2) Przy pomocy operacji elementarnych na wierszach sprowadzamy macierz B do postaci schodkowej zredukowanej $M' = [A'|B]$.

3) Jeżeli A' nie jest macierzą jednostkową to STOP, macierz A nie jest odwracalna.

4) Jeżeli $A' = I$ to $B = A^{-1}$.

Algorytm 9 Niech $A \in K^n_n$ będzie macierzą odwracalną zaś $B \in K^t_n$ dowolną macierzą.

Algorytm wyliczania $C = A^{-1}B$.

1) Budujemy macierz $M = \left[\ A \mid B\ \right]$

2) Sprowadzamy macierz M do postaci schodkowej zredukowanej M' przy pomocy operacji elementarnych na wierszach.

Ponieważ macierz A była odwracalna $M' = \left[\ I \mid A^{-1}B\ \right]$

Wykład 11

Przestrzenie sprzężone.

Definicja 11.1 *Przestrzenią sprzężoną do przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy przestrzeń wszystkich funkcji liniowych z V w K i oznaczamy $V^* = L(V; K)$.*

Uwaga Funkcjonałami nazywamy funkcje w ciało.

Definicja 11.2 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V nad ciałem K. Bazą sprzężoną do $\mathcal{A}$ nazywamy układ $\mathcal{B} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*) \subset V^*$ określony na bazie:*

$$\alpha_i^*(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Przykład 11.3 *Bazą sprzężoną do bazy standardowej $(e_1, e_2, ..., e_n)$ przestrzeni K^n jest $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Dokładniej $e_i^*(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$.*

Uwaga Nie istnieją wektory sprzężone - można sprzęgać tylko całą bazę.

Przykład 11.4 *Niech $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ i $\mathcal{B} = \big(\alpha_1 = e_1, \alpha_2 = (1,1)\big)$ będą bazami $\mathbb{R}^2$. Wówczas bazami sprzężonymi będą $\mathcal{A}^* = (e_1^*, e_2^*)$ i $\mathcal{B}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$, gdzie $\alpha_1^* = e_1^* - e_2^*$ i $\alpha_2^* = e_2^*$. Czyli $\alpha_1^*(x_1, x_2,) = x_1 - x_2$ i $\alpha_2^*(x_1, x_2,) = x_2$*

Twierdzenie 11.5 *Jeżeli V jest przestrzenią liniową nad ciałem K i $\dim V < \infty$ to baza sprzężona jest bazą V^*.*

Było to pokazane w twierdzeniu 8.3

Twierdzenie 11.6 *Przestrzeń $K[x]^*$ jest izomorficzna z $K[[x]]$.*

Dowód:
Niech $\psi : K[x]^* \to K[[x]]$ będzie określone wzorem:
dla $f \in K[x]^*$ $\psi(f) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x^i)x^i$.

Oczywiście $\psi(af+bg) = \sum_{i=1}^{\infty} (af+bg)(x^i)x^i = \sum_{i=1}^{\infty} af(x^i)x^i + bg(x^i)x^i = a\sum_{i=1}^{\infty} f(x^i)x^i + b\sum_{i=1}^{\infty} g(x^i)x^i = a\psi(f) + b\psi(g)$ i ψ ma trywialne jądro. Niech $w = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in K[[x]]$. Funkcjonał $f \in K[x]^*$ określamy na bazie $f(x^i) = a_i$. Wtedy $w = \psi(f)$ więc ψ jest izomorfizmem.

□

Uwaga Zbiór funkcjonałów sprzężonych do bazy standardowej $1, x, x^2, x^3 ...$ nie jest bazą $K[x]^*$ gdyż funkcjonał $f \in K[x]^*$ określony na bazie $f(x^i) = 2i + 1$ nie jest skończoną kombinacją liniową funkcjonałów $(x^i)^*$. Ponadto $\dim_K K[x] = \omega$ zaś $\dim_K K[x]^* \geq 2^\omega$ i zależy od mocy ciała K.

Twierdzenie 11.7 *Jeżeli V jest przestrzenią liniową nad ciałem K i $\dim V = \infty$ to $\dim V^* = |K|^{\dim V}$.*

Bez dowodu. (dla zainteresowanych dowód w "Dodatkach")

Twierdzenie 11.8 *Niech $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni K^n. Jeżeli $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}^{-1} = [k_1\, k_2\, \ldots\, k_n]$ to wzorami analitycznymi na bazę sprzężoną są:*

$\alpha_i^* = [x_1, x_2, \ldots, x_n]k_i$.

Przykład 11.9 *Niech $\alpha_1 = (1,3), \alpha_2 = (2,7)$ będzie bazą przestrzeni R^2. Wówczas $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ zatem*

$\alpha_1^*(x_1, x_2) = 7x_1 - 2x_2$ *oraz* $\alpha_2^*(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2$.

Twierdzenie 11.10 *Niech $V = A_1 \oplus A_2$ będzie sumą prostą swoich podprzestrzeni. Jeżeli wymiar V jest skończony to $V^* = B_1 \oplus B_2$ jest też sumą prostą,*
gdzie $B_1 = \{f \in V^* \mid A_2 \subset \ker f\}$ i $B_2 = \{f \in V^* \mid A_1 \subset \ker f\}$.

Ponadto obcięcia do przestrzeni A_i są izomorfizmami między B_i a A_i^*.

Dowód:

Niech $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni A_1 zaś $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ będzie bazą przestrzeni A_2. Wówczas $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n,\ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ jest bazą przestrzeni V. Na mocy twierdzenia 11.5 baza sprzężona $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*,\ \beta_1^*, \beta_2^*, ..., \beta_m^*)$ jest bazą przestrzeni V^* zaś bazami przestrzeni A_1^* i A_2^* są obcięcia funkcjonałów $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*)$ i $(\beta_1^*, \beta_2^*, ..., \beta_m^*)$ odpowiednio.

Niech $f = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i^* + \sum_{j=1}^m b_j\beta_j^* \in B_1$. Wtedy $\forall_{1\le j\le m}\ 0 = f(\beta_j) = b_j$. Zatem $f = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i^*$ i stąd $B_1 = \mathrm{lin}\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*\}$.
Analogicznie pokazujemy, że bazą B_2 jest $(\beta_1^*, \beta_2^*, ..., \beta_m^*)$.

□

Definicja 11.11 *Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni nad ciałem K. Przekształceniem sprzężonym do φ nazywamy przekształcenie $\varphi^* : W^* \to V^*$ określone wzorem: $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$.*

Stwierdzenie 11.12 *Niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem identycznościowym. Wówczas $\varphi^* : V^* \to V^*$ jest też identycznością.*

Twierdzenie 11.13 *Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni skończenie wymiarowych nad ciałem K zaś $\varphi^* : W^* \to V^*$ przekształceniem sprzężonym. Wówczas, jeżeli M jest macierzą φ w pewnych bazach to M^T jest macierzą φ^* w bazach sprzężonych.*

Zastosujemy teraz twierdzenie 11.13 do pokazania dualnych własności przekształceń φ i φ^*.

Twierdzenie 11.14 *Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym skończenie wymiarowych przestrzeni nad ciałem K zaś $\varphi^* : W^* \to V^*$ przekształceniem sprzężonym. Wówczas:*
1) φ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy φ^* jest epimorfizmem.
2) φ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy φ^* jest monomorfizmem.

Dowód:
Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V i W odpowiednio.
Wtedy $r(\varphi) = r\left(M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right) = r\left(M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T = r\left(M(\varphi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}\right) = r(\varphi^*)$.
Ad 1) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ $0 = \dim\ker\varphi = \dim V - r(\varphi)$ $\Leftrightarrow$ $\dim V = r(\varphi)$ $\Leftrightarrow$ $\dim V^* = r(\varphi^*)$ $\Leftrightarrow$ φ^* jest epimorfizmem.
Ad 2) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ $\dim W = r(\varphi)$ $\Leftrightarrow$ $\dim W^* = r(\varphi^*)$ $\Leftrightarrow$ $\dim\ker\varphi^* = \dim W^* - r(\varphi^*) = 0$ $\Leftrightarrow$ φ^* jest monomorfizmem.

$\square$

Aby udowodnić analogiczne twierdzenie bez ograniczeń do skończonego wymiaru potrzebujemy dodatkowo pewnika wyboru, twierdzenia o oddzielaniu i następującego lematu.

Twierdzenie 11.15 (O oddzielaniu) *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V zaś $\alpha \in V \backslash W$. Wówczas istnieje funkcjonał liniowy $f \in V^*$ taki, że $f(\alpha) = 1$ i $f(W) = \{0\}$.*

Lemat 11.16 *Niech $\varphi \in L(V;W)$ i $f \in L(V;U)$. Jeżeli $\ker\varphi \subset \ker f$ to istnieje przekształcenie liniowe $g : W \to U$ takie, że $f = g \circ \varphi$.*

Dowód:
Wybieramy dowolną bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $\ker\varphi$ i uzupełniamy do bazy przestrzeni V wektorami $\mathcal{A}$. Wówczas na mocy lematu 7.8 $\varphi(\mathcal{A})$ jest zbiorem liniowo niezależnym więc można go uzupełnić do bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni W.
Na otrzymanej bazie określamy przekształcenie g wzorem:

$$g(\beta) = \begin{cases} \theta\,, & \beta \notin \varphi(\mathcal{A}) \\ f(\alpha), & \beta = \varphi(\alpha) \in \varphi(\mathcal{A}) \end{cases}$$

Teraz $g = h \circ f$, gdyż przekształcenia te dają te same obrazy wektorów bazy: $\forall_{\gamma\in\mathcal{C}}\ g(\gamma) = \theta = h(\theta) = h\big(f(\gamma)\big)$ oraz $\forall_{\alpha\in\mathcal{A}}\ g\big(\varphi(\alpha)\big) = f(\alpha)$.

$\square$

Twierdzenie 11.17 *Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni nad ciałem K. Wówczas:*
1) $g \in \ker\varphi^* \Leftrightarrow \operatorname{im}\varphi \subset \ker g$.
2) $f \in \operatorname{im}\varphi^* \Leftrightarrow \ker\varphi \subset \ker f$.

Dowód:
Ad 1) $g \in \ker \varphi^* \Leftrightarrow g \circ \varphi = \theta \Leftrightarrow \operatorname{im} \varphi \subset \ker g$.

Ad 2) $\Rightarrow$
Niech $f \in \operatorname{im} \varphi^*$ i $\alpha \in \ker \varphi$. Wówczas dla pewnego $g \in W^*$ mamy $f = \varphi(g)$. Stąd $f(\alpha) = \varphi^*(g)(\alpha) = g\big(\varphi(\alpha)\big) = g(\theta) = 0$
$\Leftarrow$
Niech $\ker \varphi \subset \ker f$ więc na mocy lematu 11.16 istnieje $g \in W^*$ spełniające warunek $f = g \circ \varphi$. Stąd $f = \varphi^*(g) \in \operatorname{im} \varphi^*$.

$\square$

Popatrzmy teraz na twierdzenie dualne.

Twierdzenie 11.18 *Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni nad ciałem K. Wówczas:*
1) $\beta \in \operatorname{im} \varphi \Leftrightarrow \forall_{g \in \ker \varphi^*} \; g(\beta) = 0$
2) $\alpha \in \ker \varphi \Leftrightarrow \forall_{f \in \operatorname{im} \varphi^*} \; f(\alpha) = 0$

Dowód:
Ad 1) $\Rightarrow$
Niech $\beta \in \operatorname{im} \varphi$ i $g \in \ker \varphi^*$. Wówczas na mocy twierdzenia 11.17 1) $\operatorname{im} \varphi \subset \ker g$. Stąd $g(\beta) = 0$.
$\Leftarrow$
Niech $\beta \notin \operatorname{im} \varphi$. Na mocy twierdzenia o oddzielaniu istnieje $g \in W^*$ taki, że $g(\beta) = 1$ i $g(\operatorname{im} \varphi) = \{0\}$. Ponieważ $\operatorname{im} \varphi \subset \ker g$ więc na mocy twierdzenia 11.17 1) $g \in \ker \varphi^*$ - sprzeczność.

Ad 2) $\Rightarrow$
Niech $\alpha \in \ker \varphi$ i $f \in \operatorname{im} \varphi^*$. Wówczas dla pewnego $g \in W^*$ mamy $f = \varphi(g)$. Stąd $f(\alpha) = \varphi^*(g)(\alpha) = g\big(\varphi(\alpha)\big) = g(\theta) = 0$
$\Leftarrow$
Niech $\alpha \notin \ker \varphi$. Na mocy twierdzenia o oddzielaniu istnieje $f \in V^*$ taki, że $f(\alpha) = 1$ i $f(\ker \varphi) = \{0\}$. Ponieważ $\ker \varphi \subset \ker f$ więc na mocy twierdzenia 11.17 2) $f \in \operatorname{im} \varphi^*$.

$\square$

Bezpośrednio otrzymujemy.

Wniosek 11.19 *Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni nad ciałem K. Wówczas:*
1) $\operatorname{im} \varphi = \bigcap_{g \in \ker \varphi^*} \; \ker g$

2) $\ker \varphi \Leftrightarrow \bigcap_{f \in \operatorname{im} \varphi^*} \; \ker f$

Twierdzenie 11.20 *Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni nad ciałem K zaś $\varphi^* : W^* \to V^*$ przekształceniem sprzężonym. Wówczas:*

1) φ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy φ^* jest epimorfizmem.

2) φ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy φ^* jest monomorfizmem.

Dowód:

Ad 1) $\Rightarrow$ Niech φ będzie monomorfizmem. Wówczas dla każdego $f \in V^*$ $\ker\varphi = \{\theta\} \subset \ker f$. Zatem na mocy twierdzenia 11.17 2) $\operatorname{im}\varphi^* = W^*$

$\Leftarrow$ Niech $\theta \neq \alpha \in \ker\varphi$. Na mocy twierdzenia o oddzielaniu istnieje $f \in V^*$ taki, że $f(\alpha) = 1$ (i $f(\{\theta\}) = \{0\}$). Ale dla każdego $g \in W^*$ $\varphi^*(g)(\alpha) = g \circ \varphi(\alpha) = 0 \neq f(\alpha)$. Stąd $f \notin \operatorname{im}\ \varphi^*$.

Ad 2) $\Rightarrow$ Niech φ będzie epimorfizmem zaś $g \in \ker\varphi^*$. Wówczas dla każdego $\beta \in W = \operatorname{im}\ \varphi$ mamy $g(\beta) = 0$ na mocy twierdzenia 11.18. Stąd $\ker\varphi^* = \{\theta\}$.

$\Leftarrow$ Niech $\beta \notin \operatorname{im}\ \varphi$. Na mocy twierdzenia o oddzielaniu istnieje $g \in W^*$ taki, że $g(\alpha) = 1$ i $g(\operatorname{im}\varphi) = \{0\}$). Teraz $\varphi^*(g) = g \circ \varphi = \theta = \varphi^*(\theta)$ więc φ^* nie jest monomorfizmem.

$\square$

Twierdzenie 11.21 *Niech $V = A_1 \oplus A_2$ będzie sumą prostą swoich podprzestrzeni. Wówczas $V^* = B_1 \oplus B_2$ jest też sumą prostą, gdzie $B_1 = \{f \in V^* \mid A_2 \subset \ker f\}$ i $B_2 = \{f \in V^* \mid A_1 \subset \ker f\}$.*

Ponadto obcięcia do przestrzeni A_i są izomorfizmami między B_i a A_i^*.

Dowód:

Niech Wtedy $A_1 \cup A_2 \subset \ker f$ stąd f jest przekształceniem zerowym. Zatem $B_1 \cap B_2 = \{\theta\}$.

Niech teraz $\pi_1 : V \to V$ będzie rzutem na A_1 wzdłuż A_2 i $\pi_2 : V \to V$ będzie rzutem na A_2 wzdłuż A_1.

Jeżeli $f \in V^*$ to $f = f \circ id = f \circ (\pi_1 + \pi_2) = f \circ \pi_1 + f \circ \pi_2$ i $f \circ \pi_1 \in B_1$, $f \circ \pi_2 \in B_2$. Zatem $V^* = B_1 \oplus B_2$.

Niech $\psi : B_1 \to A_1^*$ będzie obcięciem funkcjonałów do podprzestrzeni A_1. ψ jest monomorfizmem gdyż każdy $f \in \ker\psi$ zawiera w swoim jądrze zarówno A_1 jak i A_2 a więc jest funkcjonałem zerowym.

Niech $g \in A_1^*$. Dla $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, gdzie $\alpha_i \in A_i$ określamy $f \in B_1$ wzorem $f(\alpha) = g(\alpha_1)$. Wtedy $\psi(f) = g$, zatem ψ jest epimorfizmem.

$\square$

Opiszemy teraz przestrzenie sprzężone do sprzężonych.

Twierdzenie 11.22 *Niech $\iota_V : V \to V^{**}$ będzie określone wzorem,*

$\forall_{\phi \in V^*}\, [\iota_V(\alpha)](\phi) = \phi(\alpha)$.

Wówczas ι_V jest monomorfizmem, zwanym naturalnym.

Twierdzenie 11.23 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V. Niech $\mathcal{A}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*)$ będzie bazą przestrzeni V^* sprzężoną do $\mathcal{A}$ zaś $\mathcal{A}^{**} = (\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**}, ..., \alpha_n^{**})$ będzie bazą przestrzeni V^{**} sprzężoną do $\mathcal{A}^*$. Jeżeli $\iota_V : V \to V^{**}$ jest naturalnym zanurzeniem to*
$\forall_{1 \leq i \leq n}\ \iota_V(\alpha_i) = \alpha_i^{**}$.

Twierdzenie 11.24 *Niech $\varphi \in L(V; W)$ zaś $\iota_V : V \to V^{**}$ oraz $\iota_W : W \to W^{**}$ będą naturalnymi zanurzeniami.*
Wówczas $\iota_W \circ \varphi = \varphi^{**} \circ \iota_V$.

Dowód:
Pokażemy, że dla dowolnego $\alpha \in V$ przekształcenia $\iota_W \circ \varphi(\alpha)$ i $\varphi^{**} \circ \iota_V(\alpha)$ z $W^{**} = L(W^*; K)$ są równe. Podziałajmy tymi przekształceniami na dowolnym $f \in W^*$.

$[\iota_W \circ \varphi(\alpha)](f) = f(\varphi(\alpha)) = [f \circ \varphi](\alpha)$.

$\varphi^{**} \circ \iota_V(\alpha) = (\varphi^*)^* \circ \iota_V(\alpha) = \iota_V(\alpha) \circ \varphi^*$ z definicji $(\varphi^*)^*$.

$[\varphi^{**} \circ \iota_V(\alpha)](f) = [\iota_V(\alpha) \circ \varphi^*](f) = [\iota_V(\alpha)](\varphi^*(f)) = [\varphi^*(f)](\alpha) = [f \circ \varphi](\alpha)$.

Co pokazuje równość tych przekształceń.

□

Wykład 12

Wyznacznik macierzy.
Permutacje

Definicja 12.1 *Permutacją zbioru A nazywamy każde różnowartościowe i "na" przekształcenie $f : A \to A$. Jeśli $A = \{1, 2, ..., n\}$ To zbiór wszystkich permutacji A oznaczamy symbolem S_n.*

Stwierdzenie 12.2 $|S_n| = n!$.

Ponieważ w S_n mamy łączne działanie składania przekształceń (zwane dalej iloczynem), przekształcenie identycznościowe i przekształcenia odwrotne więc S_n z działaniem składania nazywamy **grupą permutacji**.

Definicja 12.3 .

1) Permutację $\tau \in S_n$ nazywamy cyklem długości t i oznaczamy $\tau = (a_1, a_2, ..., a_t)$ gdy jest określona wzorem:

$$\tau(i) = \begin{cases} a_1 & , i = a_t \\ a_{i+1} & , i = a_j \ \wedge \ j < t \\ i & , i \notin \{a_1, a_2, ..., a_t\} \end{cases}$$

2) Cykl długości 2 nazywamy transpozycją.

3) Transpozycję postaci $(i, i+1)$ nazywamy transpozycją sąsiednią.

Twierdzenie 12.4
Każda permutacja $\tau \in S_n$ jest iloczynem cykli rozłącznych.

Twierdzenie 12.5 .
1) Każda permutacja $\tau \in S_n$ jest iloczynem transpozycji.
2) Każda permutacja $\tau \in S_n$ jest iloczynem transpozycji sąsiednich.

Definicja 12.6 *Permutację nazywamy parzystą jeśli jest iloczynem parzystej liczby transpozycji i nieparzystą gdy jest iloczynem nieparzystej liczby transpozycji.*

Znakiem permutacji τ nazywamy liczbę $(-1)^\tau = \begin{cases} 1 & ,\tau \text{ jest parzysta} \\ -1 & ,\tau \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$

Twierdzenie 12.7 *Każda permutacja jest parzysta albo nieparzysta.*

Dowód na ostatnim wykładzie.

Stwierdzenie 12.8 *Jeżeli permutacja τ jest zapisana jako iloczyn cykli to $(-1)^\tau = (-1)^n$, gdzie n jest liczbą przecinków występujących w tym zapisie.*

Definicja 12.9 *Wyznacznikiem nazywamy funkcję* $\det : K_n^n \to K$ *określoną wzorem: jeżeli $A = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}e_{i,j}$ to*
$\det(A) = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^\tau a_{1,\tau(1)}a_{2,\tau(2)}...a_{n,\tau(n)}$.

Liczenie wyznacznika w prostych przypadkach .
Macierze rozmiaru ≤ 3. (metoda Sarrusa.)

n=1. $\det[a_{1,1}] = a_{1,1}$.

n=2. $\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$

n=3.
$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} -$$

$$-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$$

Wyznaczników macierzy stopnia >3 nie da się liczyć metodą Sarrusa.

Twierdzenie 12.10 *Jeżeli macierz $A = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}e_{i,j}$ jest górną lub dolną trójkątną to wyznacznik jej jest iloczynem elementów na przekątnej* $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n}$.

Dowód:
Niech $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}e_{i,j}$ będzie macierzą górną trójkątną. To znaczy $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$. W wyznaczniku $\det(A) = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\tau} a_{1,\tau(1)}a_{2,\tau(2)}...a_{n,\tau(n)}$ wybieramy takie τ, dla którego $a_{1,\tau(1)}a_{2,\tau(2)}...a_{n,\tau(n)} \neq 0$. Wtedy $\forall_i\ i \leq \tau(i)$. Co daje $\forall_j\ j \leq \tau(j) \leq \tau^2(j) \leq \ldots \leq \tau^{n!}(j) = j$. A stąd $\forall_j\ j = \tau(j)$ czyli τ jest identycznością. Zatem $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n}$.

□

Wniosek 12.11 *Jeżeli macierz $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}e_{i,j}$ jest w postaci schodkowej to jej wyznacznik jest iloczynem elementów na przekątnej* $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n}$.

Własności wyznacznika wynikające bezpośrednio z własności permutacji

Twierdzenie 12.12 *Niech $A \in K_n^n$ będzie macierzą.*
1) $S_n = \{\sigma \mid \sigma^{-1} \in S_n\}$. $S_n^{-1} = S_n$.
1') $\det(A) = \det(A^T)$.
2) Dla dowolnej permutacji τ zachodzi $S_n = \{\tau\sigma \mid \sigma \in S_n\}$. Czyli $S_n = \tau S_n$.
2') Jeżeli macierz A' powstała z A przez przestawienie kolumn permutacją τ to $\det(A) = (-1)^{\tau}\det(A')$.
2") Jeżeli macierz A'' powstała z A przez przestawienie wierszy permutacją τ to $\det(A) = (-1)^{\tau}\det(A'')$.
3) Jeżeli macierz A ma dwie jednakowe kolumny to $\det(A) = 0$.
3') Jeżeli macierz A ma dwa jednakowe wiersze to $\det(A) = 0$.

Twierdzenie 12.13 *Wyznacznik jest funkcją liniową względem dowolnie wybranej kolumny. Dokładniej - Jeżeli $A' = [k_1\ k_2\ ...\ k_i'\ ...\ k_n]$, $A'' = [k_1\ k_2\ ...\ k_i''\ ...\ k_n]$ i $A = [k_1\ k_2\ ...\ ak_i' + bk_i''\ ...\ k_n]$ to $\det(A) = a\det(A') + b\det(A'')$.*

Wniosek 12.14 *Wyznacznik jest funkcją liniową względem dowolnie wybranego wiersza.*

Wyznacznik a operacje elementarne

Twierdzenie 12.15
1) Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez dodanie do pewnego wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę to $\det(A) = \det(B)$.
1') Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez dodanie do pewnej kolumny innej kolumny pomnożonego przez liczbę to $\det(A) = \det(B)$.
2) Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez pomnożenie pewnego wiersza przez liczbę t to $\det(A) = t \cdot \det(B)$.
2') Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez pomnożenie pewnej kolumny przez liczbę t to $\det(A) = t \cdot \det(B)$.

3) Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez zamianę dwóch wierszy to $\det(A) = -\det(B)$.

3) Jeżeli macierz A powstała z macierzy B przez zamianę dwóch kolumn to $\det(A) = -\det(B)$.

Twierdzenie 12.16 *Wyznacznik macierzy nie zmienia się przy operacjach elementarnych typu 1 na wierszach lub kolumnach.*

Twierdzenie 12.17 (rozwinięcie Laplace'a)
Niech $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}e_{i,j} \in K_n^n$ *będzie macierzą kwadratową. Symbolem* $A_{i,j}$ *oznaczamy macierz powstałą z A przez usunięcie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny. Ustalamy liczbę* $t \in \{1, 2, ..., n\}$. *Wówczas:*

1) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{t+j} a_{t,j} \det(A_{t,j})$.

2) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+t} a_{i,t} \det(A_{i,t})$.

Dowód:
1^0 Rozwinięcie względem ostatniego wiersza.

krok 1) Przypuśćmy, że w ostatnim wierszu jedynym niezerowym elementem jest $a_{n,n} = 1$, (n-ty wiersz macierzy A jest wektorem e_n).
Wtedy $\det(A) = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^\tau a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} ... a_{n,\tau(n)} =$
$= \sum_{\tau \in S_{n-1}} (-1)^\tau \left(a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \ldots a_{n-1,\tau(n-1)}\right) a_{n,n} = \det(A_{n,n}) a_{n,n} = \det(A_{n,n})$
$\left(\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{n,j} \det(A_{n,j})\right)$.

krok 2) Przypuśćmy, że w ostatnim wierszu jedynym niezerowym elementem jest $a_{n,t} = 1$, (n-ty wiersz macierzy A jest wektorem e_t).
Oznaczmy $A = [k_1\, k_2 \ldots k_t \ldots k_n]$ i $B = [k_1\, k_2 \ldots k_{t-1}\, k_{t+1} \ldots k_n\, k_t]$. Macierz B powstaje z A przez zamianę kolumn cyklem $\tau = (k_t\, k_{t+1} \ldots k_n)$ długości $n - t + 1$. $(B = [k_{\tau(1)}\, k_{\tau(2)} \ldots k_{\tau(t)} \ldots k_{\tau(n)}])$. Zatem $(-1)^\tau = (-1)^{n-t}$ i $\det(A) = (-1)^{n-t} \det(B)$. Ponadto $\forall_j\ A_{n,t} = B_{n,n}$ więc tak jak w kroku 1, $\det(A) = (-1)^{n-t} \det(B) = (-1)^{n+t} \det(B_{n,n}) = (-1)^{n+t} \det(A_{n,t})$ oraz $\left(\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{n,j} \det(A_{n,j})\right)$.

krok 3) Rozwinięcie względem n-tego wiersza. Zapiszmy n-ty wiersz $w_n = \sum_{j=1}^n a_{n,j} e_j$ Oznaczmy symbolem $A^{(j)}$ macierz powstałą z A przez zastąpienie n-tego wiersza wektorem e_j. Wtedy $A^{(j)}_{n,j} = A_{n,j}$. I ze względu na liniowość wyznacznika względem n-tego wiersza $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{n,j} \det(A)^{(j)}$
$= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{n,j} \det(A^{(j)}_{n,j}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{n,j} \det(A_{n,j})$.

2^0 Rozwinięcie względem t-tego wiersza.

Oznaczmy $A = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ i $B = [b_{i,j}] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{t-1} \\ w_{t+1} \\ \vdots \\ w_n \\ w_t \end{bmatrix}$.

Macierz B powstaje z A przez zamianę wierszy cyklem $\tau = (t,\ t+1, \ldots, n)$ długości $n-t+1$. Zatem $(-1)^\tau = (-1)^{n-t}$ i $\det(A) = (-1)^{n-t} \det(B)$. Ponadto $\forall_j\ A_{t,j} = B_{n,j}$ i $b_{n,j} = a_{t,j}$ więc tak jak w kroku 3
$\det(A) = (-1)^{n-t} \det(B) = (-1)^{n-t} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} b_{n,j} \det(B_{n,j})$
$= \sum_{j=1}^n (-1)^{t+j} a_{t,j} \det(A_{t,j})$.

3^0 Rozwinięcie względem t-tej kolumny.
Transponujemy macierz i odwołujemy się do kroku 2^0.

□

Algorytm liczenia wyznacznika

Dana macierz kwadratowa A.

1) Stosując operacje elementarne typu dodanie do pewnego wiersza wielokrotności innego lub dodanie do pewnej kolumny wielokrotności innej kolumny doprowadzamy macierz A do postaci w której w wybranej kolumnie (wierszu) jest tylko jeden element $\neq 0$.

2) Zgodnie z metodą Laplace'a rozwijamy względem tej kolumny (wiersza).

3) Jeżeli otrzymana macierz ma wymiar > 1 Go To 1).

Wykład 13

Twierdzenie 13.1 *Niech* $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \Theta & D \end{array}\right]$, *gdzie*$A \in K_p^p$, $B \in K_q^p$, $D \in K_q^q$ *i* Θ *oznacza macierz zerową.*

Wówczas $det\, M = det\, A \cdot det\, D$.

Wniosek 13.2 *Niech M będzie macierzą klatkową, w której na głównej przekątnej stoją klatki kwadratowe zaś klatki pod główną przekątną są kwadratowe. Wówczas wyznacznik* $\det M$ *jest iloczynem wyznaczników klatek z głównej przekątnej.*

Wniosek 13.3 *Jeżeli macierz* $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} e_{i,j}$ *jest górną lub dolną trójkątną to wyznacznik jej jest iloczynem elementów na przekątnej* $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n}$.

Twierdzenie 13.4 *Niech* $A \in K_n^n$ *będzie macierzą kwadratową. Wówczas równoważne są warunki:*

1) Macierz A jest odwracalna.

2) $rz(A) = n$.

3) $\det(A) \neq 0$

Twierdzenie 13.5 (Cauchy'ego) *Wyznacznik iloczynu macierzy jest iloczynem wyznaczników.* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Twierdzenie 13.6 *Niech* $f \in L(V;V)$, *gdzie* $\dim V < \infty$. *Jeżeli* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *są bazami V to* $\det M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \det M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Definicja 13.7 *Niech* $f \in L(V;V)$, *gdzie* $\dim V < \infty$. *Wyznacznikiem endomorfizmu f nazywamy liczbę* $\det f = \det M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, *gdzie* $\mathcal{A}$ *jest dowolną bazą przestrzeni V.*

Wzór Cramera na rozwiązania układu równań

Dany układ równań $\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 + & \cdots & + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + a_{2,2}x_2 + & \cdots & + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + a_{n,2}x_2 + & \cdots & + a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases}$

o macierzy kwadratowej $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$

Jeżeli $\det(A) \neq 0$ to rozwiązaniem jest ciąg

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ \dots\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

gdzie macierz A_i powstaje z macierzy A przez zastąpienie i - tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Macierz dopełnień algebraicznych .

Definicja 13.8 *Niech macierz* $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}e_{i,j}$ *będzie macierzą kwadratową. Dopełnieniem algebraicznym współczynnika* $a_{i,j}$ *nazywamy liczbę* $D_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$*. Macierzą dopełnień algebraicznych nazywamy macierz* $A^D = \sum_{i,j=1}^{n} D_{i,j}e_{i,j}$

Twierdzenie 13.9 $A \cdot \left(A^D\right)^T = \det(A) \cdot I.$

Ponadto $A^D \cdot (A)^T = \left(A^D\right)^T \cdot A = (A)^T \cdot A^D$

Wniosek 13.10 *Jeżeli* $\det(A) \neq 0$ *to* $A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \left(A^D\right)^T.$

Wniosek 13.11 *Jeżeli* $ad - bc \neq 0$ *to* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$