Wykład 1

Ten semestr rozpoczniemy badaniem endomorfizmów skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych.

Definicja 1.1 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.*

1) Przekształceniem liniowym przestrzeni V w siebie nazywamy endomorfizmem.

2) Zbiór endomorfizmów przestrzeni V oznaczamy symbolem $End_K(V)$ lub $End(V)$ gdy nie ma wątpliwości nad jakim ciałem pracujemy.

Przykład 1.2 *Niech $f \in E(\mathbb{R}^2)$ będzie zadany wzorem $f(x,y) = (x+2y,\, x)$. Wówczas $M(f)^{st}_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.*

Jeżeli wybierzemy bazę $\mathcal{A} = ((1,-1),(2,1))$ to $M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Daje to znacznie lepszy opis endomorfizmu f.

Definicja 1.3

1) Endomorfizm $f \in E(V)$ nazywamy **diagonalizowalnym** *gdy istnieje baza $\mathcal{A}$ w której macierz f jest diagonalna. $M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = diag(a_1, a_2, ..., a_n)$.*

2) Macierz kwadratową $A \in K^n_n$ nazywamy **diagonalizowalną** *gdy istnieje taka macierz odwracalna C, że $C^{-1}AC$ jest diagonalna. $C^{-1}AC = diag(a_1, a_2, ..., a_n)$.*

Definicja 1.4 *Dwie kwadratowe macierze $A, B \in K^n_n$ nazywamy* **podobnymi**. *jeżeli istnieje taka odwracalna macierz C, że $A = C^{-1}BC$.*

Stwierdzenie 1.5 *Macierze A i B są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tego samego endomorfizmu w różnych bazach.*

Definicja 1.6 *Niech f będzie przekształceniem liniowym przestrzeni V w siebie.*

1) Liczbę r nazywamy **wartością własną** *przekształcenia f jeżeli $f(\alpha) = r\alpha$ dla pewnego niezerowego wektora α.*

2) Wektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **wektorem własnym** *przekształcenia f jeżeli $f(\alpha) = r\alpha$ dla pewnej wartości własnej r przekształcenia f.*

Uwaga Jeżeli f nie ma wartości własnych to θ nie jest wektorem własnym endomorfizmu f, w przeciwnym przypadku θ jest wektorem własnym dla każdej wartości własnej.

Definicja 1.7 *Niech $M \in K^n_n$ będzie macierzą kwadratową nad ciałem K. Wielomianem charakterystycznym M nazywamy $w_M(x) = det\,(M - xI)$.*

Wielomianem charakterystycznym endomorfizmu f nazywamy $w_M(x) = det\,(M - xI)$, gdzie M jest macierzą f w dowolnej bazie.

Definicja 1.8 *Liczbę r nazywamy wartością własną macierzy kwadratowej M jeżeli $det\,(M - rI) = 0$ czyli r jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy M.*

Twierdzenie 1.9 (Sprawdzenie poprawności definicji.) *Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą bazami skończenie wymiarowej przestrzeni V. Niech $M = M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ i $N = M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ będą macierzami endomorfizmu f w tych bazach. Wówczas $w_M(x) = w_N(x)$.*

Twierdzenie 1.10 *Niech $f \in End(K^n)$ będzie opisane macierzą $M = M(f)_{st}^{st}$. Niech r będzie wartością własną f. Wówczas zbiór wektorów własnych o wartości własnej r jest podprzestrzenią K^n będącą zbiorem rozwiązań układu jednorodnego o macierzy $M - rI$.*

Wniosek 1.11 *Zbiór pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy M jest zbiorem wartości własnych M.*

Twierdzenie 1.12 *Niezerowe wektory o różnych wartościach własnych tworzą zbiór liniowo niezależny.*

Twierdzenie 1.13 *Niech $f \in End(K^n)$ ma n różnych wartości własnych $a_1, a_2, ..., a_n$. Niech $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ będzie zbiorem niezerowych wektorów własnych f odpowiadających tym wartościom własnym. Wówczas $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni K^n i macierz f w tej bazie ma postać diagonalną*

$$M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = diag(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

Definicja 1.14 *Niech $f \in L(V; V)$. Podprzestrzeń $W \subset V$ nazywamy niezmienniczą gdy $f(W) \subset W$.*

Stwierdzenie 1.15 *Podprzestrzeń W przestrzeni V jest niezmiennicza względem f wtedy i tylko wtedy, gdy $f_{|W} \in End(W)$. f obcięte do W jest endomorfizmem W.*

Stwierdzenie 1.16 *Niech $\theta \neq \alpha \in V$. Wówczas $\operatorname{lin}\{\alpha\}$ jest niezmiennicza względem f wtedy i tylko wtedy, gdy α jest wektorem własnym.*

Przykład 1.17 *Przykładami podprzestrzeni niezmienniczych są: $\{\theta\}, \ker f^i, \operatorname{im} f^i, V$.*

Definicja 1.18

Niech $f \in End_K(V)$ i $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$.

I) Złożeniem wielomianu i endomorfizmu nazywamy endomorfizm $w(f) = a_0 \cdot Id + a_1 \cdot f + a_2 \cdot f^2 + \ldots + a_n \cdot f^n$.

II) Jeżeli M jest macierzą kwadratową to wartością wielomianu w punkcie M określamy macierz $w(M) = a_0 \cdot I + a_1 \cdot M + a_2 \cdot M^2 + \ldots + a_n \cdot M^n$.

Twierdzenie 1.19 $M\left(w(f)\right)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = w\left(M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\right)$.

Twierdzenie 1.20 *Dla wielomianów $w(x)$ i $g(x)$ oraz macierzy kwadratowej M zachodzą następujące wzory:*
1) $(w+g)(M) = w(M) + g(M)$.
2) $(w \cdot g)(M) = w(M) \cdot g(M)$.

Wniosek 1.21 *Niech $f \in End_K(V)$ i $w(x), g(x) \in K[x]$.*
Wówczas $(w \cdot g)(f) = (g \cdot w)(f) = w(f) \circ g(f)$.

Twierdzenie 1.22 *Niech $M \in K_n^n$ będzie macierzą kwadratową w postaci klatkowej* $M = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$.

Wówczas dla dowolnego wielomianu $w(x) \in K[x]$ zachodzi:

$$w(M) = \begin{bmatrix} w(K_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(K_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w(K_t) \end{bmatrix}$$

.

Twierdzenie 1.23 *Niech $f \in End_K(V)$ i $w(x) \in K[x]$. Wówczas* $\ker w(f)$ *oraz* $\operatorname{im} w(f)$ *są podprzestrzeniami niezmienniczymi.*

Wykład 2

Definicja 2.1 *Wielomianem unormowanym nazywamy wielomian $w(x)$, którego współczynnik przy najwyższej potędze x jest jedynką to znaczy postaci* $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$.

Definicja 2.2 *Niech $f \in End_K(V)$. Wielomianem minimalnym endomorfizmu f nazywamy wielomian $w(x)$, który jest unormowany, najmniejszego możliwego stopnia i zerujący f, To znaczy $w(f)$ jest przekształceniem zerowym.*

Twierdzenie 2.3 *Niech $w(x)$ będzie wielomianem minimalnym endomorfizmu f. Jeżeli $g(f) = \theta$ to $w(x)$ dzieli $g(x)$.*

Twierdzenie 2.4 *Niech $f \in End_K(V)$ i W będzie podprzestrzenią niezmienniczą. Oznaczmy symbolem g endomorfizm f obcięty do W. Wówczas $w_g(x)$ wielomian charakterystyczny g dzieli $w_f(x)$ wielomian charakterystyczny endomorfizmu f.*

Definicja 2.5 *Niech $f \in End_K(V)$. Podprzestrzenią cykliczną przestrzeni V względem f, rozpiętą przez wektor α, nazywamy*

$$V_\alpha = \mathrm{lin}\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), f^3(\alpha), \ldots\}$$

.

Twierdzenie 2.6 *Niech $\alpha \in V$. Wówczas V_α jest najmniejszą podprzestrzenią niezmienniczą zawierającą wektor α. Ponadto, jeżeli $\theta \neq \alpha$ to bazą V_α jest zbiór $\mathcal{B} = \{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), f^3(\alpha), \ldots, f^{t-1}(\alpha)\}$, gdzie t jest wymiarem przestrzeni V_α.*

Twierdzenie 2.7 *Niech $V = \mathrm{lin}\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), f^3(\alpha), \ldots, f^{n-1}(\alpha)\}$ będzie przestrzenią cykliczną wymiaru n. Niech $f^n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(\alpha)$. Wówczas wielomianem minimalnym f jest $w(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ zaś wielomianem charakterystycznym $(-1)^n w(x)$.*

Wniosek 2.8 *Niech $f \in End(V)$ zaś $V = V_\alpha$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią cykliczną. Wówczas wielomiany minimalny i charakterystyczny f różnią się co najwyżej znakiem.*

Twierdzenie 2.9 (Cayleya-Hamiltona)
Niech $w_f(x) = w_M(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^j$ będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu f i macierzy kwadratowej M.

Wersja 1. Wielomian minimalny dzieli wielomian charakterystyczny.

Wersja 2. Endomorfizm $w_f(f) = a_0 Id + a_1 f + a_2 f^2 + ... + a_n f^n \equiv \theta$ jest przekształceniem zerowym.

Wersja 3. Macierz $w_M(M) = a_0 I + a_1 M + a_2 M^2 + ... + a_n M^n = [0]$ jest macierzą zerową.

Dowód:
Niech $f \in L(V;V)$. Niech α będzie dowolnym wektorem przestrzeni V zaś $W = Lin\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), f^3(\alpha), \ldots, f^{t-1}(\alpha)\}$ będzie przestrzenią cykliczną wymiaru t. Niech $f^t(\alpha) = \sum_{i=0}^{t-1} a_i f^i(\alpha)$. Oznaczmy symbolem g endomorfizm f obcięty do W. Ponieważ W jest podprzestrzenią niezmienniczą względem f więc g jest endomorfizmem W. Oznaczmy $w_g(x)$ wielomian charakterystyczny g i $w_f(x)$ wielomian charakterystyczny f. Na mocy twierdzenia 2.4 $w_f(x) = w_g(x)h(x)$ dla pewnego $h(x) \in K[x]$ zaś na mocy twierdzenia 2.7 $w_g(g)(\alpha) = \theta$. Zatem $w_f(f)(\alpha) = \theta$. Wobec dowolności wyboru wektora α otrzymujemy, że przekształcenie $w_f(f)$ jest zerowe.

$\square$

Zastosowania

Podnoszenie macierzy kwadratowych do dużych potęg.

Algorytm.

1) Liczymy wielomian charakterystyczny $w_M(x)$.

2) Dzielimy z resztą $x^n = h(x) \cdot w_M(x) + r(x)$. $st\, r(x) < st\, w_M(x)$.

3) Wstawiając do równania 2) pierwiastki $w_M(x)$ obliczamy $r(x)$. Jeżeli $w_M(x)$ ma pierwiastki wielokrotne to musimy pierwiastki wstawiać do pochodnych równania 2).

4) Obliczamy $M^n = r(M)$.

Wyliczanie dowolnego wyrazu ciągu rekurencyjnego.

Niech (a_n) będzie zdefiniowany wzorem: dane $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ i $a_k = \sum_{i=0}^{n-1} b_i a_{k-n+i}$

Definiujemy macierz $M = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Teraz $M \cdot \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-n+2} \\ a_{k-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ a_k \\ \vdots \\ a_{k-n+3} \\ a_{k-n+2} \end{bmatrix}$ i

$$M^k \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+k-1} \\ a_{n+k-2} \\ \vdots \\ a_{k+1} \\ a_k \end{bmatrix}.$$

Stwierdzenie 2.10 *Niech* $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \in K[x]$ *będzie wielomianem. Wówczas istnieje macierz* $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ *jest pierwiastkiem tego wielomianu.*

Przykład 2.11 *Pierwiastkiem wielomianu* $x^2 + 1$ *jest macierz* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Daje to* $\mathbb{R}$- *liniowy monomorfizm* $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_2^2$ *określony wzorem* $\phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. *Monomorfizm ten zachowuje mnożenie i ponadto:*

$\phi(z^{-1}) = \phi(z)^{-1}$

$\phi(\overline{z}) = \phi(z)^T$

$|z|^2 = \det \phi(z)$.

Wykład 3

Twierdzenie 3.1 *Niech $f \in End_K(V)$ i wielomian minimalny $m_f(x) = h(x)g(x)$ jest iloczynem wielomianów względnie pierwszych i unormowanych. Definiujemy endomorfizmy $f_g(x) = g(f)$ i $f_h(x) = h(f)$. Wówczas:*

1) $\operatorname{im} f_g = \ker f_h$ jest podprzestrzenią niezmienniczą względem f.

2) $\operatorname{im} f_h = \ker f_g$ jest podprzestrzenią niezmienniczą względem f.

3) $V = \operatorname{im} f_g \oplus \operatorname{im} f_h$.

4) Wielomian minimalny przekształcenia $f_{|\operatorname{im} f_g}$, będącego obcięciem f do przestrzeni $\operatorname{im} f_g$ jest równy $h(x)$.

5) Wielomian minimalny przekształcenia $f_{|\operatorname{im} f_h}$, będącego obcięciem f do przestrzeni $\operatorname{im} f_h$ jest równy $g(x)$.

Twierdzenie 3.2 *Niech $f \in End_K V$. Niech $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ będzie sumą prostą podprzestrzeni niezmienniczych. Niech $w_1(x), w_2(x), ..., w_n(x)$ będą wielomianami charakterystycznymi przekształceń f obciętych do podprzestrzeni W_i zaś $m_1(x), m_2(x), ..., m_n(x)$ będą wielomianami minimalnymi tych przekształceń. Wówczas:*

1) Wielomian charakterystyczny f jest iloczynem wielomianów charakterystycznych $f_{|W_i}$, $w_f(x) = w_1(x)w_2(x)...w_n(x)$.

2) Wielomian minimalny f jest najmniejszą wspólną wielokrotnością wielomianów minimalnych $f_{|W_i}$, $m_f(x) = NWW\,(m_1(x), m_2(x), ..., m_n(x))$.

Twierdzenie 3.3 *Niech $f \in End_K V$. Jeżeli nierozkładalny wielomian $g(x)$ dzieli wielomian charakterystyczny $w_f(x)$ to $g(x)$ dzieli wielomian minimalny endomorfizmu f.*

Twierdzenie 3.4 *Niech $f \in End_K V$ i wielomian minimalny $m_f(x) = h(x)g(x)$ jest iloczynem wielomianów względnie pierwszych i unormowanych. Definiujemy endomorfizmy $f_g(x) = g(f)$ i $f_h(x) = h(f)$. Wówczas:*

1) $\operatorname{im} f_g = \ker f_h$ jest podprzestrzenią niezmienniczą względem f.

2) $\operatorname{im} f_h = \ker f_g$ jest podprzestrzenią niezmienniczą względem f.

3) $V = \operatorname{im} f_g \oplus \operatorname{im} f_h$.

3') $V = \ker f_h \oplus \ker f_g$.

4) Wielomian minimalny przekształcenia $f_{|\operatorname{im} f_g}$, będącego obcięciem f do przestrzeni $\operatorname{im} f_g$ jest równy $h(x)$.

5) Wielomian minimalny przekształcenia $f_{|\operatorname{im} f_h}$, będącego obcięciem f do przestrzeni $\operatorname{im} f_h$ jest równy $g(x)$.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla wielomianu charakterystycznego:

Twierdzenie 3.5 *Niech $f \in End_K V$ i wielomian charakterystyczny $w_f(x) = h_1(x)g_1(x)$ jest iloczynem wielomianów względnie pierwszych. Definiujemy endomorfizmy $f_1(x) = g_1(f)$ i $f_2(x) = h_2(f)$. Wówczas:*

1) $\operatorname{im} f_1 = \ker f_2$ *jest podprzestrzenią niezmienniczą względem f.*

2) $\operatorname{im} f_2 = \ker f_1$ *jest podprzestrzenią niezmienniczą względem f.*

3) $V = \operatorname{im} f_1 \oplus \operatorname{im} f_2$.

3') $V = \ker f_2 \oplus \ker f_1$.

4) Wielomian charakterystyczny przekształcenia $f_{|\operatorname{im} f_g}$, *będącego obcięciem* f *do przestrzeni* $\operatorname{im} f_g$ *jest równy* $h(x)$.

5) Wielomian charakterystyczny przekształcenia $f_{|\operatorname{im} f_h}$, *będącego obcięciem* f *do przestrzeni* $\operatorname{im} f_h$ *jest równy* $g(x)$.

Twierdzenie 3.6 *Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i* $f \in End(V)$. *Wówczas V jest sumą prostą przestrzeni cyklicznych.*

Twierdzenie to będzie udowodnione na drugim roku na wykładzie Algebry 1. Zainteresowani mogą znaleźć dowód w "Dodatkach"

Twierdzenie 3.7 *Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i* $f \in End(V)$.

Niech $V = \bigoplus_{i=1}^{t} V_i$ *będzie sumą prostą nierozkładalnych podprzestrzeni niezmienniczych - to znaczy, każda z podprzestrzeni jest niezmienniczą względem f i nie jest sumą prostą podprzestrzeni niezmienniczych mniejszych wymiarów.*

Wówczas każda z przestrzeni V_i *jest cykliczna i jej wielomian charakterystyczny jest potęgą wielomianu nierozkładalnego.*

Rozpatrzmy przypadek gdy $V = V_\alpha$ jest cykliczna i jej wielomianem charakterystycznym jest $(-x)^n$. Zatem wielomianem minimalnym jest x^n. W bazie $\mathcal{B} = \{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), f^3(\alpha), \ldots, f^{n-1}(\alpha)\}$ macierzą f jest

$$M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po odwróceniu kolejności wektorów otrzymujemy bazę $\mathcal{A} = \{f^{n-1}(\alpha), f^{n-2}(\alpha), \ldots, f(\alpha), \alpha\}$,

dla której $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

Niech teraz$V = V_\alpha$ jest cykliczna i jej wielomianem charakterystycznym jest $(a - x)^n$. Zatem wielomianem minimalnym jest $(x - a)^n$. W bazie $\mathcal{B} = \{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), f^3(\alpha), \ldots, f^{n-1}(\alpha)\}$

macierzą f jest $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}$.

Po odwróceniu kolejności wektorów otrzymujemy bazę
$\mathcal{A} = \{f^{n-1}(\alpha), f^{n-2}(\alpha), \ldots, f(\alpha), \alpha\}$,
dla której $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$.

Definicja 3.8 *Klatką Jordana o wartości własnej a i rozmiarze n nazywamy macierz kwadratową postaci:*
$M = [a]$, *gdy* $n = 1$

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$, *gdy* $n > 1$. *Czyli macierz, której niezerowymi elementami są a na przekątnej i 1 na drugiej przekątnej.*

Twierdzenie 3.9 (Jordana) *Jeżeli wielomian charakterystyczny endomorfizmu f rozkłada się nad ciałem K na czynniki liniowe to istnieje baza $\mathscr{A}$ przestrzeni K^n, zwana bazą Jordana, w której macierz f ma postać*

$$M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}}(f) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$$ *i na przekątnej stoją klatki Jordana.*

Przedstawienie to jest jednoznaczne z dokładnością do permutacji klatek.

Przykład 3.10 *Niech* $M = M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. *Wielomianem charakterystycznym jest:* $X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2 = (X-1)^3(X-2)$

$$M - I = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ i } M - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $r(M-I) = 2$ *więc w postaci Jordana macierz M ma jedną klatkę o wartości własnej 2 i* $4 - 2 = 2$ *klatki o wartości własnej 1. Jedna z nich musi być rozmiaru 2 a druga 1.*

Postacią Jordana macierzy jest

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Szukamy bazy.

$\alpha_1 \in \ker(f - 2id) = \mathrm{im}(f - id)^2$. *Mnożymy macierz* $M - I$ *przez ostatnią kolumnę i otrzymujemy* $\alpha_1 = (0, 0, 1, -1)$.

Przestrzeń $lin\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \mathrm{im}(f - 2 \cdot id)$ *więc jest rozpięta na kolumnach macierzy* $M - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Widzimy więc, że $(1, 1, 0, -1) \in \mathrm{lin}\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \setminus \mathrm{lin}\{\alpha_2, \alpha_4\}$.

Przyjmijmy $\alpha_3 = (1, 1, 0, -1)$. *Wtedy* $\alpha_2 = (f - 2 \cdot id)(\alpha_3)$ *i obliczamy mnożąc macierze:*

$$(M - I)\alpha_3^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zatem $\alpha_2 = (-2, -1, -1, 2)$. *Jako* α_4 *wystarczy przyjąć dowolny wektor z* $\ker(f - id)$ *liniowo niezależny z* α_3. *Np. niech* $\alpha_4 = (0, 0, 1, -2)$.

Wykład 4

Stwierdzenie 4.1 *Niech* $M \in K_n^n$ *będzie macierzą kwadratową w postaci klatkowej* $M = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$.

Wówczas $r(M) = \sum_{i=1}^{t} r(K_i)$.

Twierdzenie 4.2 *Niech M będzie macierzą w postaci Jordana rozmiaru n zaś a jedną z wartości własnych M.*

Wówczas:

a) Liczba klatek Jordana o wartości własnej a jest równa $n - r(M - aI)$.

Ponadto dla $t > 1$

b) Liczba klatek Jordana rozmiaru $\geq t$ *o wartości własnej a jest równa* $r(M - aI)^{t-1} - r(M - aI)^t$.

c) Liczba klatek Jordana rozmiaru t o wartości własnej a jest równa $r(M - aI)^{t+1} + r(M - aI)^{t-1} - 2r(M - aI)^t$.

Twierdzenie 4.3 (Jordana) *Niech* $M \in K_n^n$ *będzie macierzą kwadratową o współczynnikach z ciała K. Wówczas: wielomian charakterystyczny macierzy M rozkłada się nad ciałem K na czynniki liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy* *istnieje taka macierz odwracalna A, że* $A^{-1}MA = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$

i na przekątnej stoją klatki Jordana.

Stwierdzenie 4.4 *Niech f będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni V i* $w_f(x) = (a-x)^n$. *Wówczas liczba przestrzeni cyklicznych (klatek Jordana) w rozkładzie jest równa wymiarowi przestrzeni wektorów własnych czyli* $dimV - r(f - a \cdot Id)$ *zaś rozmiar maksymalnej przestrzeni cyklicznej (klatki Jordana) jest równy stopniu wielomianu minimalnego.*

Twierdzenie 4.5 *Niech* $M \in K_n^n$ *będzie macierzą kwadratową w postaci Jordana* $M = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$.

Wówczas dla dowolnego wielomianu $w(x) \in K[x]$ *zachodzi:*

$$w(M) = \begin{bmatrix} w(K_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(K_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w(K_t) \end{bmatrix}$$

.

Wniosek 4.6 *Twierdzenie Cayleya-Hamiltona.*

Wniosek 4.7 *Jeżeli wielomian charakterystyczny jest postaci* $w_f(x) = (a_1 - x)^{n_1}(a_2 - x)^{n_2}...(a_t - x)^{n_t}$ *to wielomian minimalny jest postaci* $v_f(x) = (a_1 - x)^{m_1}(a_2 - x)^{m_2}...(a_t - x)^{m_t}$, *gdzie* m_i *jest równe maksimum z rozmiarów klatek o wartości własnej* a_i.

Zastosowania twierdzenia Jordana.

Przykład 4.8 *Opisać wszystkie funkcje klasy* C^∞ *spełniające równanie różniczkowe:* $f^{(3)} + 5f'' + 8f' + 4f \equiv 0$.

Rozwiązanie:
Rozważamy funkcję $D : C^\infty \to C^\infty$ będącą różniczkowaniem. ($D(f) = f'$). D jest przekształceniem liniowym. Niech f będzie rozwiązaniem równania. Budujemy podprzestrzeń cykliczną $V = \text{lin}\{f, D(f), D^2(f), ...\}$. Wymiar V jest taki jak wielomian minimalny funkcji f. Przyjmijmy, że wielomianem minimalnym jest $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2$. Teraz V ma bazę Jordana $\mathcal{A} = (f_1, f_2, f_3)$ w której macierzą $D_{|f}$ jest $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Teraz widzimy, że $f_1' = -f_1$ co daje $f_1 = a_1e^{-x}$, dla pewnej stałej a_1. Podobnie $f_2 = a_2e^{-2x}$, dla pewnej stałej a_2. Ponieważ

$(a_2xe^{-2x})' = a_2e^{-2x} - 2a_2xe^{-2x}$ więc jako f_3 możemy przyjąć $f_3 = a_2xe^{-2x}$. Stąd $f = ae^{-x} + be^{-2x} + cxe^{-2x}$.

□

Wykład 5

Twierdzenie 5.1 (Jordana) *Niech $M \in K^n_n$ będzie macierzą kwadratową o współczynnikach z ciała K. Wówczas: wielomian charakterystyczny macierzy M rozkłada się nad ciałem K na czynniki liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz odwracalna A, że* $A^{-1}MA = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$

i na przekątnej stoją klatki Jordana.

Twierdzenie 5.2 (Odwrotne) *Niech $M, C \in K^n_n$ będą macierzami kwadratowymi takimi, że $C^{-1}MC$ jest w postaci Jordana. Niech $f \in End(K^n)$ będzie określony macierzą M. Wówczas kolumny macierzy C tworzą bazę Jordana.*

Twierdzenie 5.3 *Na zbiorze macierzy kwadratowych $n \times n$ nad ciałem K Wprowadźmy relację podobieństwa: $A \sim B$ jeżeli istnieje taka odwracalna macierz C, że $A = C^{-1}BC$.*

Relacja $\sim$ jest relacją równoważności. To znaczy:

a) $\sim$ jest relacją zwrotną - $\forall_{A \in K^n_n}\ A \sim A$.

b) $\sim$ jest relacją symetryczną - $\forall_{A,B \in K^n_n}\ A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

c) $\sim$ jest relacją przechodnią - $\forall_{A,B,C \in K^n_n}\ A \sim B \, i \, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Twierdzenie 5.4 *Niech $A, B \in K^n_n$ zaś $w(x) \in K[x]$. Jeżeli $A \sim B$ to $r(w(A)) = r(w(B))$.*

Twierdzenie 5.5 *Niech $A, B \in K^n_n$. Jeżeli wielomian charakterystyczny $w_A(x)$ rozkłada się nad ciałem K na czynniki liniowe to:*

$A \sim B$ wtedy i tylko wtedy, gdy A i B mają tę samą postać Jordana.

Wniosek 5.6 *Niech $A, B \in K^n_n$. Jeżeli wielomian charakterystyczny $w_A(x) = \prod_{i=1}^{t}(a_i - x)^{n_i}$ to:*

$A \sim B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{1 \le i \le t} \forall_{1 \le j \le n_i}\ r(A - a_iI)^j = r(B - a_iI)^j$.

Wykład 6

Lemat 6.1 *Niech* $f \in End_K(V)$ *i* $\dim V = n < \infty$. *Niech* $\alpha, \beta \in V$ *będą niezerowymi wektorami. Przyjmijmy oznaczenia:* $f_1 = f_{|V_\alpha}$, $f_2 = f_{|V_\beta}$, $f_3 = f_{|V_{\alpha+\beta}}$. *Jeżeli wielomiany minimalne przekształceń* f_1 *i* f_2 *są względnie pierwsze to:*

a) $V_{\alpha+\beta} = V_\alpha \oplus V_\beta$.

b) Wielomian minimalny f_2 *jest iloczynem wielomianów minimalnych przekształceń* f_1 *i* f_2.

Lemat 6.2 *Niech* $f \in End_K(V)$ *i* $\dim V = n < \infty$. *Wówczas istnieją takie podprzestrzenie niezmiennicze* V_α *i* W, *że* $V = V_\alpha \oplus W$, V_α *jest przestrzenią cykliczną i wielomiany minimalne endomorfizmów* f *i* $f_{|V_\alpha}$ *obciętego do* V_α *są równe.*

Definicja 6.3 *Klatką Frobeniusa nazywamy macierz kwadratową postaci:*

$$M = [a] \text{ lub } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix}, \text{ czyli macierz,}$$

której niezerowymi elementami są 1 na -1-szej przekątnej i ostatnia kolumna.

Twierdzenie 6.4 *Niech* V *będzie przestrzenią liniową wymiaru* $n < \infty$ *nad ciałem* K *zaś* φ *będzie endomorfizmem* V. *Wówczas istnieje taka baza*

$$\text{przestrzeni } V \text{ w której macierz } \varphi \text{ ma postać } M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$$

i na przekątnej stoją klatki Frobeniusa takie, że wielomian minimalny klatki K_{i+1} *dzieli wielomian minimalny klatki* K_i. *Ponadto przedstawienie to jest jednoznaczne.*

Dowód:

Na mocy twierdzenia 3.5 rozkładamy przestrzeń V na przestrzenie cykliczne $V = \oplus_{i=1}^{t} \oplus_{j=1}^{s_i} V_{i,j}$, gdzie wielomian minimalny endomorfizmu φ obciętego do przestrzeni $V_{i,j}$ jest potęgą wielomianu nierozkładalnego $w_i(x)$. Uporządkujmy indeksy tak by dla każdego i dim $V_{i,1} \geq$ dim $V_{i,2} \geq ... \geq$ dim V_{i,s_i} Jako V_1 bierzemy podsumę $V_1 = \oplus_{i=1}^{t} V_{i,1}$. Podobnie, dla $j \leq s = Max\{s_i \,|\, i \leq t\}$ bierzemy $V_j = \oplus_{i=1}^{t} V_{i,j}$, gdzie w przypadku $j > s_i$ przyjmujemy $V_{i,j} = \{\theta\}$.

Przestrzenie V_j są cykliczne bo, stopień wielomianu minimalnego endomorfizmu φ obciętego do V_j jest równy dim V_j. Teraz jako bazę $\mathcal{A}$ wystarczy wziąć ciąg, którego kolejnymi podciągami są cykliczne bazy przestrzeni V_1, V_2,...,V_s.

Jednoznaczność,

Niech macierze $A = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & F_s \end{bmatrix}$ będą podobnymi macierzami w postaci Frobeniusa. Pokażemy przez indukcję względem $i \leq t$, że $K_i = F_i$ dla każdego i oraz $t = s$.

1) $i = 1$.

Niech $w(x)$ będzie wielomianem minimalnym macierzy A. Wówczas $w(x)$ jest wielomianem minimalnym macierzy K_1 i wyznacza macierz K_1. Analogicznie $w(x)$ jest wielomianem minimalnym macierzy B oraz F_1 i wyznacza macierz F_1. Zatem $K_1 = F_1$.

2) Zakładamy, że $K_i = F_i$ dla $i < j$. Zapisujemy macierze w postaci klatkowej $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$,

gdzie $A_1 = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{j-1} \end{bmatrix} = B_1$,

$A_2 = \begin{bmatrix} K_j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_t \end{bmatrix}$ oraz $B_2 = \begin{bmatrix} F_j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & F_s \end{bmatrix}$.

Niech $v(x)$ będzie wielomianem minimalnym macierzy A_2.

Wówczas $v(A) = \begin{bmatrix} v(A_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim v(B) = \begin{bmatrix} v(A_1) & 0 \\ 0 & v(B_2) \end{bmatrix}$. Porównując rzędy macierzy wnioskujemy, że $v(B_2) = 0$. Zatem $v(x)$ dzieli wielomian minimalny macierzy B_2. Analogicznie pokazujemy, że wielomian minimalny macierzy B_2 dzieli wielomian minimalny macierzy A_2. Więc to jest ten sam wielomian. Ponieważ macierze A_2 i B_2 są w postaci Frobeniusa więc $v(x)$ jest wielomianem minimalnym macierzy K_j i F_j. Stąd $K_j = F_j$. Równość $t = s$ wynika z równości rozmiarów macierzy A i B.

□

Z jednoznaczności przedstawienia bezpośrednio otrzymujemy wniosek:

Wniosek 6.5 *Niech $K \subset L$ będą ciałami. Niech $A, B \in K^n_n$ będą macierzami podobnymi nad ciałem L. Wówczas macierze A i B są podobne nad K.*

Twierdzenie 6.6 *Niech $A, B \in K^n_n$ i wielomian charakterystyczny macierzy A rozkłada się na czynniki liniowe. Wówczas macierze A i B są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam rozkład na klatki Jordana.*

Przestrzenie afiniczne.

Badamy przestrzeń liniową nad ciałem K i jej podprzestrzenie A i B.

Definicja 6.7 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K zaś W jej podprzestrzenią.*

Warstwą przestrzeni V względem podprzestrzeni W nazywamy każdy podzbiór postaci $\alpha + W = \{\alpha + \beta \mid \beta \in W\}$, gdzie $\alpha \in V$.

Twierdzenie 6.8 *Niech H będzie niepustym podzbiorem przestrzeni liniowej K^n. Wówczas H jest warstwą wtedy i tylko wtedy, gdy H jest zbiorem rozwiązań pewnego niesprzecznego układu równań liniowych.*

Definicja 6.9 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.*

a) Podzbiór $H \subset V$ nazywamy przestrzenią afiniczną gdy jest warstwą względem pewnej podprzestrzeni W. zaś W jej podprzestrzenią.

b) Niech H będzie przestrzenią afiniczną. Podzbiór $S \subset H$ nazywamy podprzestrzenią afiniczną gdy jest warstwą względem pewnej podprzestrzeni W_1.

c) Elementy przestrzeni afinicznej nazywamy punktami.

Wniosek 6.10 *Podprzestrzeń przestrzeni afinicznej jest przestrzenią afiniczną.*

Definicja 6.11

a) Skończony ciąg liczb z ciała K nazywamy układem wag gdy ich suma jest równa 1.

b) Niech $(p_1, p_2, ..., p_n)$ będzie ciągiem punktów z przestrzeni afinicznej H zaś $(a_1, a_2, ..., a_n) \subset K^n$ będzie układem wag. Kombinacją afiniczną punktów p_i o wagach a_i nazywamy punkt $p = a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n$ (środek ciężkości).

Twierdzenie 6.12 *Dowolna kombinacja afiniczna punktów z przestrzeni afinicznej H należy do H.*

Twierdzenie 6.13 *Niech S będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznej H. Wówczas S jest podprzestrzenią afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy każda kombinacja afiniczna punktów z S należy do S.*

Wykład 7

Definicja 7.1

Niech Z będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznej H. Symbolem $\mathrm{af}(Z)$ oznaczamy zbiór wszystkich środków ciężkości punktów z Z.

Twierdzenie 7.2 *Niech Z będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznej H. Wówczas $\mathrm{af}(Z) = p + T$ jest podprzestrzenią afiniczną H i $T = T(\mathrm{af}(Z)) = \{\overrightarrow{p,q} \mid q \in \mathrm{af}(Z)\}$ jest podprzestrzenią liniową $T(H)$. Ponadto $\mathrm{af}(Z)$ jest najmniejszą przestrzenią afiniczną zawierającą Z.*

Lemat 7.3 *Niech* $q = \sum_{i=1}^{t} k_i p_i$ *będzie kombinacją afiniczną punktów z H.*

Jeżeli $k_1 \neq 0$ *to* $p_1 = \frac{1}{k_1} q + \sum_{i=2}^{t} \frac{-k_i}{k_1} p_i$ *jest kombinacją afiniczną.*

Definicja 7.4 *Bazą punktową przestrzeni afinicznej H nazywamy minimalny podzbiór rozpinający H. To znaczy:*
1) $\mathrm{af}(Z) = H$
2) Jeżeli $Z_1 \subsetneq Z$ *to* $\mathrm{af}(Z_1) \neq H$.

Definicja 7.5 *Układem bazowym przestrzeni afinicznej H nazywamy ciąg* $(p\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t)$, *gdzie* $p \in H$ *zaś* $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t\}$ *jest bazą przestrzeni liniowej* $T(H)$.

Definicja 7.6 *Powiemy, że ciągu punktów* $p_1, p_2, ..., p_t$ *z przestrzeni afinicznej H jest w położeniu szczególnym jeżeli jeden z nich jest kombinacją afiniczną pozostałych.*

Powiemy, że zbiór punktów P z przestrzeni afinicznej H jest w położeniu ogólnym jeżeli żaden jego skończony podzbiór nie jest w położeniu szczególnym.

Twierdzenie 7.7 *Niech* $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, ..., p_t\}$ *będzie podzbiorem przestrzeni afinicznej H. Wówczas równoważne są warunki:*
1) $\mathcal{B}$ *jest bazą punktową H.*
2) $\mathcal{B}$ *jest maksymalnym podzbiorem punktów w położeniu ogólnym.*
3) Każdy punkt z H można jednoznacznie przedstawić jako środek ciężkości punktów z $\mathcal{B}$.

Dowód:

3) $\Rightarrow$ 2)Z jednoznaczności zapisu wynika, że każdy punkt z $\mathcal{B}$
$p_i = 1 \cdot p_i \notin \mathrm{af}(\mathcal{B} \setminus \{p_i\})$ więc punkty z $\mathcal{B}$ są w położeniu ogólnym.

Niech $q \notin \mathcal{B}$ wtedy $q \in af(\mathcal{B})$ zatem zbiór $\mathcal{B} \cup \{q\})$ jest w położeniu szczególnym i stąd $\mathcal{B}$ jest maksymalnym podzbiorem punktów w położeniu ogólnym.

2) $\Rightarrow$ 1) Niech $q \notin \mathcal{B}$ wtedy z maksymalności zbiór $\mathcal{B} \cup \{q\}$ jest w położeniu szczególnym i $q \in af(\mathcal{B})$ lub istnieje takie j, że $p_j = k\,q + \sum_{i=1, i \neq j}^{t} k_i p_i$ jest środkiem ciężkości. Ale wtedy $k \neq 0$ i na mocy lematu 8.5 $q = \sum_{i=1}^{t} s_i p_i$ dla układu wag $s_i = \begin{cases} \frac{1}{k} & , i = j \\ \frac{-k_i}{k} & , i \neq j \end{cases}$.

Stąd $H = \mathrm{af}(\mathcal{B})$.

Zbiór $\mathcal{B}$ jest minimalnym rozpinającym gdyż dla każdego i $p_i \notin \mathrm{af}(\mathcal{B} \setminus \{p_i\})$

1) $\Rightarrow$ 3) Ponieważ $\mathcal{B}$ jest bazą punktową więc każdy punkt z H jest kombinacją afiniczną punktów z $\mathcal{B}$.

Przypuśćmy teraz, że punkt q ma dwa różne zapisy.

$q = \sum_{i=1}^{t} a_i p_i = \sum_{i=1}^{t} b_i p_i$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć $a_1 \neq b_1$ i $a_1 \neq 0$. Na mocy lematu 8.5
$p_1 = \frac{1}{a_1} q + \sum_{i=2}^{t} \frac{-a_i}{a_1} p_i = \frac{1}{a_1} \sum_{i=1}^{t} b_i p_i + \sum_{i=2}^{t} \frac{-a_i}{a_1} p_i = \frac{b_1}{a_1} p_1 + \sum_{i=2}^{t} \frac{b_i - a_i}{a_1} p_i$

Ponieważ $\frac{b_1}{a_1} + \sum_{i=2}^{t} \frac{b_i - a_i}{a_1} = 1$ więc $1 = \frac{a_1}{a_1 - b_1} \sum_{i=2}^{t} \frac{b_i - a_i}{a_1} = \sum_{i=2}^{t} \frac{b_i - a_i}{a_1 - b_1}$
Przyjmijmy $p = \sum_{i=2}^{t} \frac{b_i - a_i}{a_1 - b_1} p_i$ wtedy $p_1 = \frac{b_1}{a_1} p_1 + \frac{a_1 - b_1}{a_1} p$. Na mocy lematu 8.5
$p = \frac{a_1}{a_1 - b_1} p_1 - \frac{a_1}{a_1 - b_1} \frac{b_1}{a_1} p_1 = p_1$. Zatem $p_1 = \sum_{i=2}^{t} \frac{b_i - a_i}{a_1 - b_1} p_i$ a stąd
af$(\mathcal{B} \setminus \{p_1\})$ = af$(\mathcal{B})$ sprzeczność z minimalnością $\mathcal{B}$.

□

Twierdzenie 7.8 *Niech $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, ..., p_t\}$ będzie podzbiorem przestrzeni afinicznej H. Wówczas równoważne są warunki:*

1) $\mathcal{B}$ jest bazą punktową H.
2) $\{\overrightarrow{p_0, p_1}, \overrightarrow{p_0, p_2}, ..., \overrightarrow{p_0, p_t}\}$ jest bazą $T(H)$.
3) $\{p_0; \overrightarrow{p_0, p_1}, \overrightarrow{p_0, p_2}, ..., \overrightarrow{p_0, p_t}\}$ jest układem bazowym H.

Wykład 8

Twierdzenie 8.1
1) Wszystkie bazy punktowe są równoliczne.
2) Jeżeli Z jest bazą punktową H to $|Z| = dim\, H + 1$.

Definicja 8.2 *Niech H_1 i H_2 będą podprzestrzeniami afinicznymi przestrzeni afinicznej V. Powiemy, że H_1 jest równoległa do H_2 gdy $T(H_1) \subset T(H_2)$.*

Ponadto przestrzenie H_1 i H_2 nazywamy (wzajemnie) równoległymi gdy $T(H_1) = T(H_2)$.

Stwierdzenie 8.3 *Niech $A = (p_0, p_1, ..., p_t)$ będzie ciągiem punktów z przestrzeni afinicznej K^n. Wówczas ciąg A jest w położeniu ogólnym wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy* $\begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ p_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_t & 1 \end{bmatrix}$ *jest równy $t + 1$, gdzie macierz ta jest utworzona ze współczynników punktów i dodana jest kolumna jedynek.*

Definicja 8.4 *Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K. Przekształcenie $f : H_1 \to H_2$ nazywamy afinicznym jeżeli zachowuje środki ciężkości. To znaczy $f\left(\sum_{i=1}^{t} k_i p_i\right) = \sum_{i=1}^{t} k_i f(p_i)$ dla każdego ciągu punktów $p_1, p_2, ..., p_t$ z przestrzeni H_1 i każdego układu wag $k_1, k_2, ..., k_t$ z ciała K.*

Twierdzenie 8.5
Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K, $p \in H_1$, $f : H_1 \to H_2$. Niech $f' : T(H_1) \to T(H_2)$. Wówczas:
1) Jeżeli przekształcenie f jest afiniczne to f' określone wzorem $f'(\alpha) = \overrightarrow{f(p), f(p + \alpha)}$ jest liniowe.
2 Jeżeli przekształcenie f' jest liniowe to f określone wzorem $f(p + \alpha) = f(p) + f'(\alpha)$) jest afiniczne.

Przekształcenie liniowe f' jest nazywane pochodną przekształcenia afinicznego f.

Stwierdzenie 8.6 *Niech $f : H_1 \to H_2$ będzie przekształceniem afinicznym. Wówczas definicja przekształcenia pochodnego f' nie zależy od wyboru punktu. Tzn. $\forall_{p,q \in H_1} \forall_{\alpha \in S(H_1)}\ f'(\alpha) = \overrightarrow{f(p), f(p+\alpha)} = \overrightarrow{f(q), f(q+\alpha)}$*

Twierdzenie 8.7 *Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami afinicznymi nad tym samym ciałem K. Niech $\{p_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t\}$ będzie układem bazowym przestrzeni afinicznej H_1 zaś $\{q_0, q_1, q_2, ..., q_t\}$ będą dowolnymi punktami z przestrzeni afinicznej H_2. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne $f : H_1 \to H_2$ spełniające warunki: $f(p_0) = q_0$ i $\forall_{1 \le i \le t}\ f(p_0 + \alpha_i) = q_i$.*

Twierdzenie 8.8 *Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami afinicznymi nad tym samym ciałem K. Niech $\{p_0, p_1, p_2, ..., p_t\}$ będzie bazą punktową H_1 zaś $\{q_0, q_1, q_2, ..., q_t\}$ będą dowolnymi punktami z przestrzeni afinicznej H_2. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne $f : H_1 \to H_2$ spełniające warunek: $\forall_{0 \le i \le t}\ f(p_i) = q_i$*

.

Przykłady przekształceń afinicznych.

1) Przesunięcia o wektor α. $T_\alpha(p) = p + \alpha$. $T'_\alpha = id$.

2) Jednokładność o środku p i skali r. $J(p+\alpha) = p + r\alpha$. J' homotetia o skali r.

Niech $T(H) = A \oplus B$ będzie sumą prostą podprzestrzeni liniowych, $p \in H$.

3) Rzutem na podprzestrzeń afiniczną $p + A$ wzdłuż B $(q + B)$ nazywamy przekształcenie $\pi : H \to H$ zdefiniowane wzorem $\pi(p + \alpha + \beta) = p + \alpha$, gdy $\alpha \in A$ i $\beta \in B$. π' jest rzutem na A wzdłuż B.

4) Symetrią względem podprzestrzeni afinicznej $p + A$ wzdłuż B $(q + B)$ nazywamy przekształcenie $S : H \to H$ zdefiniowane wzorem $\pi(p + \alpha + \beta) = p + \alpha - \beta$, gdy $\alpha \in A$ i $\beta \in B$. S' jest symetrią względem A wzdłuż B.

Definicja 8.9 *Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K, zaś $f : H_1 \to H_2$ przekształceniem afinicznym.*

1) f nazywamy monomorfizmem afinicznym gdy jest różnowartościowe.

2) f nazywamy epimorfizmem afinicznym gdy jest " na".

3) f nazywamy izomorfizmem afinicznym gdy monomorfizmem i epimorfizmem.

Twierdzenie 8.10 *Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K, $p \in H_1$,*
$f : H_1 \to H_2$. Niech $f' : T(H_1) \to T(H_2)$ będzie takie,
że $f'(\alpha) = \overrightarrow{f(p), f(p+\alpha)}$. Wówczas:

a) f jest monomorfizmem afinicznym wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest monomorfizmem liniowym.

b) f jest epimorfizmem afinicznym wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest epimorfizmem liniowym.

c) f jest izomorfizmem afinicznym wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest izomorfizmem liniowym.

Uwaga. Nie ma definicji jądra przekształcenia afinicznego.

Definicja 8.11 *Niech $\{p_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ będzie układem bazowym przestrzeni afinicznej H nad ciałem K.* **Parametryzacją** *przestrzeni H nazywamy przekształcenie $\Psi : K^n \to H$ określone wzorem:*

$$\Psi(x_1, x_2, ...x_n) = p_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n.$$

Twierdzenie 8.12 *Parametryzacja jest izomorfizmem afinicznym.*

Definicja 8.13 *Niech $f : H_1 \to H_2$ będzie przekształceniem afinicznym. Niech $\mathcal{A} = \{p\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ i $\mathcal{B} = \{q\,; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_t\}$ będą układami bazowymi tych przestrzeni. Macierzą f w tych układach bazowych nazywamy:*

$M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$, *gdzie A jest macierzą f' w bazach $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$*

i $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t\}$ zaś kolumna $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix}$ *ma współczynniki takie,*

że $f(p) = q + \sum_{i=1}^{t} b_i\beta_i$.

Stwierdzenie 8.14 *Niech $f : H_1 \to H_2$ będzie przekształceniem afinicznym. Niech $\mathcal{A} = \{p_0; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ i $\mathcal{B} = \{q; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_t\}$ będą układami bazowymi tych przestrzeni. Wówczas $f(p + \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i) = q + \sum_{i=1}^{t} b_i\beta_i$, gdzie*

$$M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wykład 9

Definicja 9.1 *Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K, zaś $f : H_1 \to H_2$ przekształceniem afinicznym.*

1) f nazywamy monomorfizmem afinicznym gdy jest różnowartościowe.

2) f nazywamy epimorfizmem afinicznym gdy jest " na".

3) f nazywamy izomorfizmem afinicznym gdy monomorfizmem i epimorfizmem.

Twierdzenie 9.2 *Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K, $p \in H_1$,*
$f : H_1 \to H_2$. Niech $f' : T(H_1) \to T(H_2)$ będzie takie,
że $f'(\alpha) = \overrightarrow{f(p), f(p+\alpha)}$. Wówczas:

a) f jest monomorfizmem afinicznym wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest monomorfizmem liniowym.

b) f jest epimorfizmem afinicznym wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest epimorfizmem liniowym.

c) f jest izomorfizmem afinicznym wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest izomorfizmem liniowym.

Uwaga. Nie ma definicji jądra przekształcenia afinicznego.

Definicja 9.3 *Niech $\{p_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ będzie układem bazowym przestrzeni afinicznej H nad ciałem K.* **Parametryzacją** *przestrzeni H nazywamy przekształcenie $\Psi : K^n \to H$ określone wzorem:*

$$\Psi(x_1, x_2, ...x_n) = p_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n.$$

Twierdzenie 9.4 *Parametryzacja jest izomorfizmem afinicznym.*

Definicja 9.5 *Niech $f : H_1 \to H_2$ będzie przekształceniem afinicznym. Niech $\mathcal{A} = \{p\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ i $\mathcal{B} = \{q\,; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_t\}$ będą układami bazowymi tych przestrzeni. Macierzą f w tych układach bazowych nazywamy:*

$M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$, gdzie A jest macierzą f' w bazach $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ i $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t\}$ zaś kolumna $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix}$ ma współczynniki takie,

że $f(p) = q + \sum_{i=1}^{t} b_i\beta_i$.

Stwierdzenie 9.6 *Niech $f : H_1 \to H_2$ będzie przekształceniem afinicznym. Niech $\mathcal{A} = \{p_0; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ i $\mathcal{B} = \{q; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_t\}$ będą układami bazowymi tych przestrzeni. Wówczas $f(p + \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i) = q + \sum_{i=1}^{t} b_i\beta_i$, gdzie*

$$M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 9.7 *Niech H_1, H_2 i H_3 będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K o układach bazowych $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ odpowiednio. Niech $g : H_1 \to H_2$ i $f : H_2 \to H_3$ będą przekształceniami afinicznymi. Wówczas:*

1) $f \circ g$ jest przekształceniem afinicznym.

2) $f' \circ g' = (f \circ g)'$

3) $M(f \circ g)^{\mathcal{A}_3}_{\mathcal{A}_1} = M(f)^{\mathcal{A}_3}_{\mathcal{A}_2} \cdot M(g)^{\mathcal{A}_2}_{\mathcal{A}_1}$.

Definicja 9.8 *Przestrzenie afiniczne H_1 i H_2 nazywamy izomorficznymi gdy istnieje izomorfizm afiniczny między nimi.*

Twierdzenie 9.9 *Relacja izomorfizmu afinicznego jest relacją równoważności. To znaczy relacją zwrotną symetryczną i przechodnią.*

Twierdzenie 9.10 *Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad ciałem K. Wówczas H jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną K^n ze standardowym braniem środka ciężkości wtedy i tylko wtedy, gdy H posiada $n+1$ - elementową bazę punktową.*

Uwaga. Powyższe twierdzenie pozwala łatwo budować przestrzeń wektorów swobodnych $T(H)$ gdy przestrzeń afiniczną H definiujemy aksjomatycznie.

Wniosek 9.11 *Przestrzenie afiniczne H_1 i H_2 są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam wymiar.*

Dowód tylko w przypadku przestrzeni skończonego wymiaru.

Wykład 10

Definicja 10.1 *Niech H_1 i H_2 będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K, $f_1, f_2, \dots, f_t$ będą przekształceniami afinicznymi z H_1 w H_2 zaś $a_1, a_2, \dots, a_t$ układem wag. Kombinacją afiniczną przekształceń f_i o wagach a_i nazywamy przekształcenie afiniczne $\varphi = \sum_{i=1}^{t} a_i f_i : H_1 \to H_2$ określone wzorem:*
$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{t} a_i f_i(p)$.

Twierdzenie 10.2 *Zbiór przekształceń afinicznych z H_1 w H_2 z kombinacjami afinicznymi jest przestrzenią afiniczną izomorficzną z przestrzenią afiniczną macierzy postaci $\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ i izomorfizm jest zadany przez branie macierzy w ustalonych układach bazowych.*

Wniosek 10.3 *Wymiar przestrzeni przekształceń afinicznych z H_1 w H_2 jest równy $(dim\, H_1 + 1) \cdot dim\, H_2$.*

Aksjomatyczna definicja przestrzeni afinicznej.

Definicja 10.4 *Niech H będzie niepustym zbiorem zaś K ciałem. Przestrzenią afiniczną nad ciałem K nazywamy zbiór H z działaniem zwanym kombinacją afiniczną spełniającym warunki:*
0) $\sum$ każdemu skończonemu ciągowi punktów $p_1, p_2, ..., p_t$ ze zbioru H i każdemu układowi wag $k_1, k_2, ..., k_t$ z ciała K $\quad(\sum_{i=1}^{t} k_i = 1)$ przyporządkowuje punkt $q = \sum_{i=1}^{t} k_i p_i \in H$.

1) Jednoznaczność: Jeżeli $\sum_{i=1}^{t} k_i = 1$ *to* $\forall_{p\in H}\ p = \sum_{i=1}^{t} k_i p$
2) $\sum_{i=1}^{t} k_i p_i = \sum_{i=1}^{t} k_i p_i + 0q$.
3) Przemienność: $\forall_{\sigma\in S_t}\ \sum_{i=1}^{t} k_i p_i = \sum_{i=1}^{t} k_{\sigma(i)} p_{\sigma(i)}$.
4) Rozdzielność: Jeżeli $q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} p_j$, *dla układów wag* $a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,t}$ *to dla dowolnego układu wag* $k_1, k_2, ..., k_t$ *z ciała* K

$$\sum_{i=1}^{t} k_i q_i = \sum_{i=1}^{t} k_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} p_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{t} k_i a_{i,j} \right) p_j \ .$$

5) Odwracanie: Jeżeli dla pewnych układów wag $a_1, a_2, ..., a_t$ *i* $b_1, b_2, ..., b_t$ *z ciała* K *zachodzi* $\sum_{i=1}^{t} a_i p_i = \sum_{i=1}^{t} b_i p_i$ *to:*

$$a_j \neq b_j \Rightarrow p_j = \sum_{i\neq j} \frac{a_i - b_i}{b_j - a_j} p_i.$$

Twierdzenie 10.5 *Niech* H *będzie zbiorem z działaniami spełniającymi definicje 10.4 i wyróżnionym punktem* p.
Wówczas zbiór par $T(H) = \{\overrightarrow{p,q} \mid q \in H\}$ *z działaniami:*
$\overrightarrow{p,q_1} + \overrightarrow{p,q_2} = \overrightarrow{p, q_1 + q_2 - p}$ *i* $k\cdot\overrightarrow{p,q} = \overrightarrow{p, kq + (1-k)p}$ *jest przestrzenią liniową.*

Wykład 11

Przekształcenia wieloliniowe.

Definicja 11.1 *Niech* $V_1, V_2, ..., V_n$ *i* W *będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem* K. *Przekształcenie* $\varphi : V_1 \times V_2 \times ... \times V_n \to W$ *nazywamy* **wieloliniowym** *lub* **n-liniowym** *jeżeli jest liniowe ze względu na każdą współrzędną. To znaczy dla każdego i, po ustaleniu ciągu wektorów* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$
$\forall_{\beta_1,\beta_2\in V_i} \forall_{a_1,a_2\in K}\ \varphi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \mathbf{a_1}\beta_1 + \mathbf{a_2}\beta_2, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) =$
$= a_1\varphi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \beta_{\mathbf{1}}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) + a_2\varphi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \beta_{\mathbf{2}}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$

Zbiór takich przekształceń dwuliniowych oznaczamy symbolem $L(V_1, V_2, ..., V_n\,; W)$ *lub* $L_n(V\,; W)$ *gdy* $V = V_1 = V_2 = ... = V_n$.

Przykład 11.2 *Niech* $V_1 \in K^n_t$, $V_2 \in K^m_n$ *i* $W \in K^m_t$. *Wówczas przekształcenie* $\varphi : V_1 \times V_2 \to W$ *określone wzorem* $\varphi(A, B) = AB$ *jest dwuliniowe.*

Przykład 11.3 *Niech* $V_1 = V_2 = W \neq \{\theta\}$. *Wówczas przekształcenie* $\varphi : V_1 \times V_2 \to W$ *określone wzorem* $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ *nie jest dwuliniowe.*
Niech $\alpha \neq \theta$. *Wówczas* $\varphi(\alpha, \theta + \theta) = \alpha$ *zaś* $\varphi(\alpha, \theta) + \varphi(\alpha, \theta) = 2\alpha$.

Definicja 11.4 *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K.*
1) Przekształcenie $\varphi \in L_n(V;K)$ nazywamy **symetrycznym** *jeżeli dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$ zachodzi $\varphi(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) = \varphi(\alpha_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(2)},...,\alpha_{\sigma(n)})$.*
2) Przekształcenie $\varphi \in L_n(V;K)$ nazywamy **antysymetrycznym** *jeżeli równość dwóch wektorów w ciągu $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ implikuje*
$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) = \theta$.

Twierdzenie 11.5 *Jeżeli przekształcenie $\varphi \in L_n(V;K)$ jest antysymetryczne to dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$ zachodzi:*

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) \quad = \quad (-1)^{\sigma}\varphi(\alpha_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(2)},...,\alpha_{\sigma(n)}) \qquad (1)$$

Uwaga. Warunek (1) z twierdzenia 11.5 jest równoważny antysymetryczności gdy ciało ma charakterystykę różną od 2 ale dla ciał charakterystyki 2 jest równoważny symetryczności.

Przykład 11.6 *Niech $V = K^n$. Wówczas przekształcenie $\varphi \in L_n(V;K)$ określone wzorem* $\varphi(w_1,w_2,...,w_n) = \det \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$
jest n - liniowe i antysymetryczne.

Definicja 11.7 *Niech V_1 i V_2 będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Przekształcenie $\varphi : V_1 \times V_2 \to K$ nazywamy* **funkcjonałem dwuliniowym** *jeżeli jest liniowe ze względu na każdą współrzędną. To znaczy:*
1) $\forall_{\alpha_1,\alpha_2\in V}\forall_{a_1,a_2\in K}\forall_{\beta\in V_2}\ \varphi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2,\beta) = a_1\varphi(\alpha_1,\beta) + a_2\varphi(\alpha_2,\beta)$
2) $\forall_{\alpha\in V}\forall_{\beta_1,\beta_2\in V_2}\forall_{b_1,b_2\in K}\ \varphi(\alpha, b_1\beta_1 + b_2\beta_2) = b_1\varphi(\alpha,\beta_1) + b_2\varphi(\alpha,\beta_2)$
Zbiór takich przekształceń dwuliniowych oznaczamy symbolem $L(V_1,V_2\,;K)$ lub $L_2(V_1\,;K)$ gdy $V_1 = V_2$.

Przykład 11.8 *Niech $M \in K^t_n$. Określamy funkcjonał $\varphi : K^n \times K^t \to K$ wzorem: $\varphi(\alpha,\beta) = \alpha \cdot M \cdot \beta^T$. Z własności mnożenia macierzy wynika, że φ jest dwuliniowy czyli $\varphi \in L(K^n,K^t\,;K)$.*

Twierdzenie 11.9 *Zbiór $L(V_1,V_2\,;W)$ z naturalnymi działaniami dodawania przekształceń i mnożenia przekształceń przez liczby jest przestrzenią liniową nad ciałem K.*

Twierdzenie 11.10 *Niech V_1 i V_2 będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o bazach $\mathcal{A} = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ i $\mathcal{B} = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)$ odpowiednio. Niech $\mathcal{C} = (\gamma_{1,1},\gamma_{1,2},...,\gamma_{n,t})$ będzie ciągiem wektorów z W. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie dwuliniowe $\varphi \in L(V_1,V_2\,;W)$ spełniające warunek*

$$\forall_{1\le i\le n}\forall_{1\le j\le t}\ \varphi(\alpha_i,\beta_j) = \gamma_{i,j}$$

.

Definicja 11.11 *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o bazach $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ i $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$ odpowiednio. Macierzą funkcjonału dwuliniowego $\in L(V, W\,; K)$ w bazach $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazywamy macierz*

$$G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}) = \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_1, \beta_1) & \varphi(\alpha_1, \beta_2) & \cdots & \varphi(\alpha_1, \beta_t) \\ \varphi(\alpha_2, \beta_1) & \varphi(\alpha_2, \beta_2) & \cdots & \varphi(\alpha_2, \beta_t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\alpha_n, \beta_1) & \varphi(\alpha_n, \beta_2) & \cdots & \varphi(\alpha_n, \beta_t) \end{bmatrix}.$$

Macierz $G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B})$ nazywamy macierzą Grama.

W przypadku gdy $V = W$ i $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ przyjmujemy oznaczenie $G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}) = G(\varphi; \mathscr{A})$

Stwierdzenie 11.12 *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o bazach $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ i $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$ odpowiednio.*
Jeżeli $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$ oraz $\beta = \sum_{j=1}^{t} b_j \beta_j$
to $\varphi(\alpha, \beta) = [a_1, a_2, ..., a_n] G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}) [b_1, b_2, ..., b_t]^T$.

Twierdzenie 11.13 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V i $\varphi \in L_2(V\,; K)$. Wówczas:*

1) Funkcjonał φ jest symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $G(\varphi; \mathscr{A}) = G(\varphi; \mathscr{A})^T$.

2) Jeżeli $\mathrm{char} K \neq 2$ to funkcjonał φ jest antysymetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $G(\varphi; \mathscr{A}) = -G(\varphi; \mathscr{A})^T$.

Twierdzenie 11.14 *Niech $\varphi \in L(V, W\,; K)$. Określamy przekształcenia $\varphi_1 : V \to W^*$ i $\varphi_2 : W \to V^*$ wzorami $[\varphi_1(\alpha)](\beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ i $[\varphi_2(\beta)](\alpha) = \varphi(\alpha, \beta)$. Wówczas φ_1 i φ_2 są przekształceniami liniowymi.*

Ponadto dla baz $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ przestrzeni V i $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$ przestrzeni W zachodzi równość: $G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}) = M(\varphi_2)_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}^*} = \left[M(\varphi_1)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}^*}\right]^T$. Gdzie $\mathscr{A}^*$ jest bazą sprzężoną do $\mathscr{A}$ zaś $\mathscr{B}^*$ jest bazą sprzężoną do $\mathscr{B}$.

Dowód:
Zauważmy $M(\varphi_1(\alpha_i))_{\mathscr{B}}^{st} = [\varphi(\alpha_i, \beta_1)\ \varphi(\alpha_i, \beta_2)\ ...\ \varphi(\alpha_i, \beta_t)\,] \in K_1^n$
więc $\varphi_1(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i, \beta_1)\beta_1^* + \varphi(\alpha_i, \beta_2)\beta_2^* + ... + \varphi(\alpha_i, \beta_t)\beta_t^*$
co daje $G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}) = \left[M(\varphi_1)_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}^*}\right]^T$.

Analogicznie $M(\varphi_2(\beta_j))_{\mathscr{A}}^{st} = [\varphi(\alpha_1, \beta_j)\ \varphi(\alpha_2 \beta_j)\ ...\ \varphi(\alpha_n, \beta_j)\,]$.
więc $\varphi_2(\beta_j) = \varphi(\alpha_1, \beta_j)\alpha_1^* + \varphi(\alpha_2, \beta_j)\alpha_2^* + ... + \varphi(\alpha_n, \beta_j)\alpha_n^*$
co daje $G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}) = M(\varphi_2)_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}^*}$

$\square$

Uwaga 1 *Przy naturalnym utożsamieniu przestrzeni V i V^{**} oraz W i W^{**} φ_1 i φ_2 są parą wzajemnie sprzężonych przekształceń. Dokładniej $\varphi_1^* = \varphi_2 \circ I_W^*$ i $\varphi_2^* = \varphi_1 \circ I_V^*$.*

Definicja 11.15 *Niech $\varphi \in L(V, W; K)$ będzie funkcjonałem dwuliniowym. Rzędem φ nazywamy liczbę $r(\varphi) = r(G(\varphi; \mathcal{A}))$, dla dowolnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V.*

Stwierdzenie 11.16 $r(\varphi) = r(\varphi_1) = r(\varphi_2)$.

Wykład 12

Twierdzenie 12.1 *Niech $\varphi \in L(V, W; K)$ będzie funkcjonałem dwuliniowym. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ i $\mathcal{A}' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n)$ będą bazami przestrzeni V zaś $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$ i $\mathcal{B}' = (\beta'_1, \beta'_2, ..., \beta'_t)$ będą bazami przestrzeni W. Wówczas:*

1) $G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}) = G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}')M(id)^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}$.

2) $G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}) = \left(M(id)^{\mathscr{A}'}_{\mathscr{A}}\right)^T G(\varphi; \mathscr{A}', \mathscr{B})$

3) $G(\varphi; \mathscr{A}, \mathscr{B}) = \left(M(id)^{\mathscr{A}'}_{\mathscr{A}}\right)^T G(\varphi; \mathscr{A}', \mathscr{B}')M(id)^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}$

Definicja 12.2 *Macierze kwadratowe $A, B \in K^n_n$ nazywamy* **kongruentnymi** *gdy istnieje taka macierz odwracalna C, że $A = C^T BC$. Relację tą oznaczamy symbolem $\equiv$.*

$A \equiv B \Leftrightarrow A = C^T BC$ *dla pewnej macierzy odwracalnej C.*

Twierdzenie 12.3 *Macierze kwadratowe $A, B \in K^n_n$ są kongruentne wtedy i tylko wtedy, gdy gdy są macierzami funkcjonału dwuliniowego w pewnych bazach. Dokładniej: istnieje taka baza $\mathcal{A}$ przestrzeni K^n_n, że dla funkcjonału $\varphi \in L_2(K^n; K)$ określonego wzorem $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha A \beta^T$. $B = G(\varphi; \mathcal{A})$.*

Twierdzenie 12.4 *Kongruencja jest relacją równoważności.*

Stwierdzenie 12.5 *Macierze kongruentne do symatrycznych są symetryczne.*

Definicja 12.6 *Przestrzenią* **dwuliniową** *nazywamy parę $\{V; \varphi\}$, gdzie V jest przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś $\varphi \in L_2(V; K)$ jest funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym.*

Definicja 12.7 *Niech $\{V; \varphi\}$ będzie przestrzenią dwuliniową.*

1) Wektory α, β nazywamy **prostopadłymi** *(ortogonalnymi) gdy $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Parę wektorów prostopadłych oznaczamy $\alpha \perp \beta$.*

2) Wektor α nazywamy **izotropowym** *gdy $\varphi(\alpha, \alpha) = 0$. Pozostałe wektory nazywamy nieizotropowymi.*

Definicja 12.8 *Niech $\{V; \varphi\}$ będzie przestrzenią dwuliniową.*
Bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ przestrzeni V nazywamy **ortogonalną** *lub prostopadłą gdy jej wektory są parami prostopadłe. To znaczy $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \perp \alpha_j$.*

Twierdzenie 12.9 *Niech $X \subset \{V;\varphi\}$ będzie niepustym podzbiorem przestrzeni dwuliniowej. Wówczas zbiór $X^{\perp} = \{\alpha \in V \; ; \; \forall_{\beta \in X}\, \alpha \perp \beta\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.*

Twierdzenie 12.10 *Każda skończeniewymiarowa przestrzeń dwuliniowa nad ciałem charakterystyki $\neq 2$ ma bazę ortogonalną. To znaczy złożoną z wektorów parami prostopadłych.*

Przy dowodzie Twierdzenia 12.9 posłużymy się następującym lematami:

Lemat 12.11 *Niech $W = lin\{\alpha\}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni dwuliniowej V. Wówczas $V = W \oplus W^{\perp}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektor α jest nieizotropowy.*

Lemat 12.12 *Niech α i β będą takimi wektorami przestrzeni dwuliniowej $\{V;\varphi\}$ nad ciałem charakterystyki $\neq 2$, że $\varphi(\alpha,\beta) \neq 0$. Wówczas co najmniej jeden z wektorów α, β i $\alpha + \beta$ jest nieizotropowy.*

Wniosek 12.13 *Niech $M \in K_n^n$ będzie macierzą kwadratową nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Wówczas M jest kongruentna z diagonalną wtedy i tylko wtedy, gdy M jest symetryczna.*

Dowód:

$\Leftarrow$ Niech $M = M^T \in K_n^n$ zaś φ będzie funkcjonałem dwuliniowym opisanym macierzą M. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni $\{K^n;\varphi\}$. Jeżeli $C = M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$ to $C^T M C = [\varphi(\alpha_i, \alpha_j)]$ jest macierzą diagonalną.

$\Rightarrow$ Niech $M \equiv D$, gdzie D jest macierzą diagonalną. Wówczas istnieje taka macierz odwracalna C, że $M = C^T D C$.
Wtedy $M^T = \left(C^T D C\right)^T = C^T D^T \left(C^T\right)^T = C^T D C = M$.

□

Przykład 12.14 *Niech K będzie ciałem charakterystyki 2 zaś $\varphi \in L_2(K^2;K)$ będzie określone wzorem $\varphi((x_1\, x_2);(y_1\, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$. Wówczas:*

1) Każdy wektor przestrzeni $\{K^2;\varphi\}$ jest izotropowy.

2) Przestrzeń $\{K^2;\varphi\}$ nie ma bazy ortogonalnej.

3) Macierz $G(\varphi;st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nie jest kongruentna z diagonalną.

Wykład 13

Definicja 13.1 *Niech $\{V;\varphi\}$ będzie przestrzenią dwuliniową skończonego wymiaru.*

1) Powiemy, że V jest całkowicie zdegenerowana gdy $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ \varphi(\alpha,\beta)=0$.

2) Powiemy, że V jest nieosobliwa gdy $r(\varphi)=\dim V$.

3) Powiemy, że V jest osobliwa gdy nie jest nieosobliwa.

Twierdzenie 13.2 *Niech $\{V;\varphi\}$ będzie przestrzenią dwuliniową skończonego wymiaru. Wówczas równoważne są warunki:*

1) Przestrzeń V jest nieosobliwa.

2) Dla każdej podprzestrzeni W przestrzeni V zachodzi $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V$.

3) Dla każdej podprzestrzeni W przestrzeni V zachodzi $W=\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$.

4) $V^{\perp}=\{\theta\}$.

5) $\forall_{\theta\neq\alpha\in V}\exists_{\beta\in V}\ \varphi(\alpha,\beta)\neq 0$.

Dowód:

1) $\Rightarrow$ 2) Rozszerzmy bazę $\mathcal{A}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_t)$ podprzestrzeni W do bazy $\mathcal{B}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_t,...,\alpha_n)$ przestrzeni V. Wtedy $W^{\perp}=\mathcal{A}^{\perp}$.

Wektor $\beta=\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i\in W^{\perp}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(b_1,b_2,...,b_n)$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego o macierzy $M=\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_t\end{bmatrix} G(\varphi;\mathcal{B})$.

Ponieważ V jest nieosobliwa więc $r(M)=t=\dim W$. Na mocy twierdzenia Kroneckera Capelliego $\dim W^{\perp}=n-r(M)=\dim V-\dim W$.

2) $\Rightarrow$ 3) Oczywiście $W\subset\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$ więc wystarczy sprawdzić, że mają te same wymiary. $\dim W=\dim V-\dim W^{\perp}=\dim\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$.

3) $\Rightarrow$ 4) Niech $W=\{\theta\}$. Wtedy $W=\left(W^{\perp}\right)^{\perp}=V^{\perp}$.

4) $\Rightarrow$ 5) Niewprost. Jeżeli nie zachodzi 5) to istnieje $\theta\neq\alpha$ takie, że $\forall_{\beta\in V}\,\varphi(\alpha;\beta)=0$. Wtedy $\alpha\in V^{\perp}$.

5) $\Rightarrow$ 1) Niewprost. Niech V osobliwa. Wówczas na mocy twierdzenia 11.14 przekształcenie φ_1 na nietrywialne jądro. Niech $\theta\neq\alpha\in\ker\varphi_1$. Wtedy $\forall_{\beta\in V}\,\varphi(\alpha;\beta)=[\varphi_1(\alpha)](\beta)=0$.

□

Stwierdzenie 13.3 *Niech $\{V;\varphi\}$ będzie przestrzenią dwuliniową skończonego wymiaru nad ciałem K zaś W podprzestrzenią liniową V.*
Niech $\varphi_{|W\times W}:W\times W\to K$ będzie określone wzorem $\varphi_{|W\times W}(\alpha,\beta)=\varphi(\alpha,\beta)$.
Wówczas $\{W;\varphi_{|W\times W}\}$ jest przestrzenią dwuliniową.

Zwykle zamiast $\{W;\varphi_{|W\times W}\}$ będziemy pisać $\{W;\varphi\}$.

Twierdzenie 13.4 *Niech $\{V;\varphi\}$ będzie przestrzenią dwuliniową skończonego wymiaru zaś W taką podprzestrzenią V, że $V = W \oplus V^{\perp}$. Wówczas $\{W;\varphi\}$ jest przestrzenią nieosobliwą zaś $\{V^{\perp};\varphi\}$ jest przestrzenią całkowicie zdegenerowaną.*

Twierdzenie 13.5 *Niech $M = M^T \in \mathbf{C}_n^n$ będzie macierzą o współczynnikach zespolonych. Wówczas istnieje dokładnie jedna liczba naturalna $0 \leq t \leq n$ taka, że macierz M jest kongruentna z $diag(1,1,...,1,0,0,...,0)$ macierzą diagonalną, mającą t jedynek na przekątnej.*

Wniosek 13.6 *Zbiór macierzy symetrycznych rozmiaru n o współczynnikach zespolonych rozkłada się na $n+1$ klas abstrakcji względem relacji kongruencji.*

Wniosek 13.7 *Niech $A, B \in \mathbf{C}_n^n$ będą macierzami symetrycznymi o współczynnikach zespolonych. Wówczas $A \equiv B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(B)$.*

Definicja 13.8 *Niech $\{V;\varphi\}$ będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem liczb rzeczywistych* $\mathbf{R}$.

1) Bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ przestrzeni V nazywamy **półunormowaną** *gdy $\forall_{1 \leq t \leq n}\ \varphi(\alpha_t;\alpha_t) \in \{-1,0,1\}$.*

2) Bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ przestrzeni V nazywamy **unormowaną** *gdy $\forall_{1 \leq t \leq n}\ \varphi(\alpha_t;\alpha_t) = 1$.*

3) Bazę ortogonalną i unormowaną nazywamy **ortonormalną.**

Twierdzenie 13.9 *Każda przestrzeń dwuliniowa nad ciałem liczb rzeczywistych ma bazę ortogonalną i półunormowaną.*

Wniosek 13.10 *Każda macierz symetryczna nad ciałem liczb rzeczywistych jest kongruentna z macierzą diagonalną mającą na przekątnej liczby ze zbioru $\{-1,0,1\}$.*

Twierdzenie 13.11 *[Sylvester'a o bezwładności]Niech $\{V;\varphi\}$ będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jeżeli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ i $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ są ortogonalnymi i półunormowanymi bazami V to równe są liczby:*

$r_+(\mathcal{A})$ = liczba takich $1 \leq i \leq n$, że $\varphi(\alpha_i,\alpha_i) = 1$ oraz $r_+(\mathcal{B})$ = liczba takich $1 \leq i \leq n$, że $\varphi(\beta_i,\beta_i) = 1$.

$r_-(\mathcal{A})$ = liczba takich $1 \leq i \leq n$, że $\varphi(\alpha_i,\alpha_i) = -1$ oraz $r_-(\mathcal{B})$ = liczba takich $1 \leq i \leq n$, że $\varphi(\beta_i,\beta_i) = -1$.

Twierdzenie 13.12 (Sylvester'a o bezwładności) *Jeżeli dwie macierze diagonalne mające na przekątnej liczby ze zbioru $\{-1,0,1\}$ są kongruentne nad ciałem liczb rzeczywistych to mają te same liczby jedynek, te same liczby minus jedynek i te same liczby zer.*

Przykład 13.13 *Niech* $G(\mathbb{R}^2; st) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Wówczas* $G(\mathbb{R}^2; \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *dla* $\mathcal{A} = ((\frac{5}{3}, \frac{4}{3}), (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}))$.

Definicja 13.14

1) Niech $\{V; \varphi\}$ *będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ *zaś* $\mathcal{A}$ *jej bazą ortogonalną i półunormowaną. Sygnaturą przestrzeni* V *nazywamy liczbę* $r_+(\mathcal{A}) - r_-(\mathcal{A})$ *(oznaczenia z twierdzenia 13.11.)*

2) Niech $M \in \mathbb{R}^n_n$ *będzie macierzą symetryczną. Sygnaturą macierzy* M *nazwiemy sygnaturę przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *z funkcjonałem dwuliniowym określonym macierzą* M.

Wykład 14

Definicja 14.1 *Niech* $\{V; \varphi\}$ *będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$.

1) Powiemy, że φ *jest dodatnio określone lub* **iloczynem skalarnym** *gdy* $\forall_{\alpha \neq \theta}\ \varphi(\alpha, \alpha) > 0$.
Co oznaczamy $''\varphi > 0''$.

2) Powiemy, że φ *jest nieujemnie określone gdy* $\forall_{\alpha \neq \theta}\ \varphi(\alpha, \alpha) \geq 0$.
Co oznaczamy $''\varphi \geq 0''$.

3) Powiemy, że φ *jest ujemnie określone gdy* $\forall_{\alpha \neq \theta}\ \varphi(\alpha, \alpha) < 0$.
Co oznaczamy $''\varphi < 0''$.

Uwaga 2 *Warunek nieosobliwości nie jest konieczny ale ułatwia dowód.*

Stwierdzenie 14.2 *Niech* $\{V; \varphi\}$ *będzie przestrzenią dwuliniową, skończonego wymiaru, nad ciałem liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ *i niech* $\mathcal{A}$ *będzie bazą* V. *Wówczas:*

1) Funkcjonał φ *jest nieujemnie określony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz* E, *że* $G(\varphi; \mathcal{A}) = E^T E$.

2) Funkcjonał φ *jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz odwracalna* E, *że* $G(\varphi; \mathcal{A}) = E^T E$.

Algorytm ortogonalizacji Grama - Schmidta.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie ciągiem liniowo niezależnych wektorów z przestrzeni dwuliniowej $\{V; \varphi\}$. Indukcyjnie budujemy bazę ortogonalną:

1^0 $\gamma_1 = \alpha_1$.
2^0 $\gamma_j = \alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\varphi(\alpha_j; \gamma_i)}{\varphi(\gamma_i; \gamma_i)} \gamma_i$.

Twierdzenie 14.3 *Niech* $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *będzie ciągiem liniowo niezależnych wektorów z przestrzeni dwuliniowej* $\{V; \varphi\}$. *Jeżeli dla pewnego* $1 \leq t$ *funkcjonał* φ *obcięty do przestrzeni* $V_t = \text{lin}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t\}$ *jest iloczynem skalarnym to Wektory* $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_t, \gamma_{t+1}$ *uzyskane metodą Grama - Schmidta są dobrze określone i parami prostopadłe. Ponadto równe są przestrzenie*

$$\text{lin}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t, \alpha_{t+1}\} = \text{lin}\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_t, \gamma_{t+1}\}.$$

Definicja 14.4 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j)$ będzie ciągiem wektorów z przestrzeni dwuliniowej $\{V; \varphi\}$. Wyznacznikiem Grama ciągu $\mathcal{A}$ nazywamy liczbę*

$$W(\varphi\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j) = W(\varphi\,; \mathcal{A}) = \det \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_1, \alpha_1) & \varphi(\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & \varphi(\alpha_1, \alpha_j) \\ \varphi(\alpha_2, \alpha_1) & \varphi(\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & \varphi(\alpha_2, \alpha_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\alpha_j, \alpha_1) & \varphi(\alpha_j, \alpha_2) & \cdots & \varphi(\alpha_j, \alpha_j) \end{bmatrix}.$$

Stwierdzenie 14.5 *Niech $\{V; \varphi\}$ będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ zaś $W \subset V$ taką podprzestrzenią,*
że $\varphi_{|W \times W} > 0$. Wówczas $V = W \oplus W^{\perp}$.

Twierdzenie 14.6 (Kryterium Sylvestera) *Niech φ będzie funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V. Wówczas φ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{1 \leq j \leq n}\ W(\varphi\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j) > 0$.*

Twierdzenie 14.7 (Kryterium Sylvestera) *Niech M będzie macierzą φ w bazie $\mathcal{A}$ zaś $M^{(j)}$ powstaje z M przez odrzucenie ostatnich $n - j$ wierszy i kolumn. Wówczas φ jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{1 \leq j \leq n}\ det\, M^{(j)} > 0$.*

Definicja 14.8 *Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej V. Długość (normę) wektora $\alpha \in V$ definiujemy jako liczbę*
$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$.

Twierdzenie 14.9 *Własności normy:*
1) $\|\alpha\| \geq 0$
2) $\|\alpha\| = 0 \Rightarrow v = \theta$
3) $\|t\alpha\| = |t| \cdot \|\alpha\|$
4) $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ *(nierówność Cauchy'ego-Schwarza)*
5) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\||$ *(nierówność Minkowskiego)*
6) $\|\alpha\| - \|\beta\| \leq \|\alpha - \beta\|$

Dowód. 3). $\|t\alpha\| = \sqrt{\langle t\alpha, t\alpha \rangle} = \sqrt{t^2 \langle \alpha, \alpha \rangle} = |t| \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = |t| \cdot \|\alpha\|$.

4) łatwo sprawdzić (4), gdy α, β są liniowo zależne (wówczas w (1) mamy nawet $=$). Załóżmy więc, że α, β są liniowo niezależne. Wtedy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathrm{lin}\{\alpha, \beta\}$. Na mocy kryterium Sylvestera $0 < W(\varphi; \mathcal{A}) = det \begin{bmatrix} \langle \alpha, \alpha \rangle & \langle \alpha, \beta \rangle \\ \langle \beta, \alpha \rangle & \langle \beta, \beta \rangle \end{bmatrix}$. Stąd

$$0 < \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle - \langle \beta, \alpha \rangle \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle > \langle \alpha, \beta \rangle^2$$

$|\langle\alpha,\beta\rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

5) Korzystając z (4) dostajemy

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\langle\alpha,\beta\rangle \leq$$

$$\leq \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\|\alpha\| \cdot \|\beta\| = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2.$$

6) wynika z (5).

Wniosek 14.10 (Nierówność Schwarza)
1) $(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$.

2) $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$.

Wykład 15

Przestrzenie euklidesowe

Badamy przestrzenie tylko nad ciałem liczb rzeczywistych.

Definicja 15.1 *Iloczynem skalarnym w przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{R}$ nazywamy funkcjonał $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ dwuliniowy symetryczny i dodatnio określony. To znaczy spełniający dla wszystkich $\alpha, \alpha', \beta \in V$ i $t \in \mathbb{R}$ warunki:*
1. (symetryczność) $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\beta,\alpha\rangle$
2. (liniowość na pierwszej współrzędnej)
$\langle\alpha+\alpha',\beta\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle + \langle\alpha',\beta\rangle$ *i* $\langle t\alpha,\beta\rangle = t\langle\alpha,\beta\rangle$
3. (dodatnia określoność) $\langle\alpha,\alpha\rangle > 0$ *dla* $\alpha \neq \theta$.

Definicja 15.2 *Niech $\{V;\varphi\}$ będzie przestrzenią ortogonalną skończonego wymiaru nad ciałem liczb rzeczywistych.*
1) Mówimy że wektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ jest unormowany (inaczej : jednostkowy), gdy $\varphi(\alpha,\alpha) = 1$.
2) Bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożoną z wektorów unormowanych nazywamy bazą ortonormalną.

Twierdzenie 15.3 *Niech $\{V;\varphi\}$ będzie przestrzenią ortogonalną skończonego wymiaru nad ciałem liczb rzeczywistych. Wówczas φ jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy V ma bazę ortonormalną.*

Przykład 15.4 *Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określoną wzorem: Dla wektorów $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$ $\langle\alpha,\beta\rangle = \alpha \cdot \beta^T = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$*
Tak określony iloczyn skalarny nazywamy **standardowym** .

Przykład 15.5 *Niech $V = C([a,b])$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z odcinka $[a,b]$ w $\mathbb{R}$ wówczas iloczynem skalarnym jest funkcjonał ξ określony wzorem: $\xi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.*

Definicja 15.6 *Skończenie wymiarową przestrzeń ortogonalną $\{V, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ z określonym w niej iloczynem skalarnym nazywamy* **przestrzenią euklidesową**. *Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ze standardowym iloczynem skalarnym oznaczamy symbolem E^n.*

Przykład 15.7 *Na przestrzeni $V = \mathbb{R}^n_t$ określamy funkcjonał $\mathcal{T}$ wzorem $\mathcal{T}(A,B) = AB^T$. Wówczas $\mathcal{T}$ jest iloczynem skalarnym zaś norma wyraża się wzorem: $\|[a_{i,j}]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$.*

Twierdzenie 15.8 *Niech $A \in \mathbb{R}^n_t$ i $B \in \mathbb{R}^m_n$. Wówczas $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.*

Stwierdzenie 15.9 *Niech φ będzie funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym na przestrzeni liniowej V. Wówczas dla każdej podprzestrzeni $W \subset V$ $\varphi_{|W\times W}$ jest funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym na W. Jeżeli ponadto φ jest iloczynem skalarnym to $\varphi_{|W\times W}$ jest iloczynem skalarnym.*

Stwierdzenie 15.10 *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej E. Wówczas $E = W \oplus W^{\perp}$.*

Porównaj z twierdzeniem 13.2

Przykład 15.11 *Niech $\mathcal{A} = (1, x, x^2, x^3, ...)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $V = R[x]$. Jeżeli $W = \{w(x) \mid w(1) = 0\}$ to bazę podprzestrzeni W można zortogonalizować metodą Grama - Schmidta ale $W^{\perp} = \{\theta\}$ więc $R[x] \neq W \oplus W^{\perp}$.*

Definicja 15.12 *Cosinusem niezorientowanego kąta między niezerowymi wektorami $\alpha, \beta \in E^n$ nazywamy liczbę*

$$\cos\angle(\alpha,\beta) = \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}$$

Twierdzenie 15.13 (Twierdzenie cosinusów) *Dla niezerowych wektorów $\alpha, \beta \in E^n$ prawdziwy jest wzór:*

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + \|\alpha\|\,\|\beta\|\cos\angle(\alpha,\beta)$$

Jako wniosek otrzymujemy:

Twierdzenie 15.14 (Twierdzenie Pitagorasa) *Jeżeli $\alpha, \beta \in E^n$ to*

$\alpha \perp \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$.

Definicja 15.15 *Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Powiemy, że V jest przestrzenią* **zorientowaną** *jeżeli jest wybrana baza $\mathcal{A}$.*

Dwie bazy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nazywamy zgodnie zorientowanymi jeżeli $\det M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$ *a przeciwnie zorientowanymi jeżeli* $\det M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Definicja 15.16 *Niech E^2 będzie przestrzenią euklidesową zorientowaną przez bazę standardową. Dla niezerowych wektorów $\alpha, \beta \in E^2$ sinusem kąta między nimi nazywamy liczbę* $\sin\angle(\alpha,\beta) = \frac{1}{\|\alpha\|\|\beta\|} det \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 15.17 *Dla niezerowych wektorów $\alpha, \beta, \gamma \in E^2$ zachodzi:*

1) $\sin\angle(\alpha,\beta) = -\sin\angle(\beta,\alpha)$

2) $\sin^2\angle(\alpha,\beta) + \cos^2\angle(\alpha,\beta) = 1$.

3) $\sin\angle(\alpha,\gamma) = \sin\angle(\alpha,\beta)\cos\angle(\beta,\gamma) + \cos\angle(\alpha,\beta)\sin\angle(\beta,\gamma)$.

4) $\cos\angle(\alpha,\gamma) = \cos\angle(\alpha,\beta)\cos\angle(\beta,\gamma) - \sin\angle(\alpha,\beta)\sin\angle(\beta,\gamma)$.

Dowód:

Ad 2) $\sin^2\angle(\alpha,\beta) + \cos^2\angle(\alpha,\beta) = \frac{\langle\alpha,\beta\rangle^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} + \frac{1}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} det \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^2 =$

$\frac{\langle\alpha,\beta\rangle^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} + \frac{1}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} det \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} [\alpha^T \; \beta^T] \right) = \frac{(\alpha\beta^T)^2 + (\alpha\alpha^T)(\beta\beta^T) - (\alpha\beta^T)^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} = 1.$

□

(dowód 4) jest zadaniem.)

Wykład 16

Izomorfizmy przestrzeni euklidesowych

Twierdzenie 16.1 *Niech $\{V_1;\varphi_1\}$ i $\{V_2;\varphi_2\}$ będą przestrzeniami euklidesowymi zaś $f \in L(V_1;V_2)$. Wówczas równoważne są warunki:*

1) f zachowuje iloczyn skalarny. To znaczy $\forall_{\alpha,\beta\in V_1}\ \varphi_1(\alpha;\beta) = \varphi_2(f(\alpha); f(\beta))$.

2) f zachowuje normę. To znaczy $\forall_{\alpha\in V_1}\ \|\alpha\|_1 = \|f(\alpha)\|_2$.

Definicja 16.2 *Niech $\{V_1;\varphi_1\}$ i $\{V_2;\varphi_2\}$ będą przestrzeniami euklidesowymi. Przekształcenie $f : V_1 \to V_2$ nazywamy* **izometrią liniową** *jeżeli jest liniowe i zachowuje iloczyn skalarny. To znaczy* $\forall_{\alpha,\beta\in V_1}\ \varphi_1(\alpha;\beta) = \varphi_2(f(\alpha); f(\beta))$.

Stwierdzenie 16.3 *Izometrią liniową jest monomorfizmem liniowym.*

Twierdzenie 16.4 *Symetria jest izometrią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła.*

Twierdzenie 16.5 *Niech $\{V_1; \langle\rangle_1\}$ i $\{V_2; \langle\rangle_2\}$ będą przestrzeniami euklidesowymi zaś $f : V_1 \to V_2$ przekształceniem liniowym. Wówczas równoważne są warunki:*

1) f jest izometrią liniową.

2) Dla każdej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ przestrzeni V_1 zachodzi $\forall_{1\leq i\leq n}\ \langle \alpha_i; \alpha_j\rangle_1\ = \langle f(\alpha_i); f(\alpha_j)\rangle_2$.

3) f przeprowadza bazy ortonormalne w podzbiory baz ortonormalnych.

4) f przeprowadza pewną bazę ortonormalną na podzbiór bazy ortonormalnej.

Twierdzenie 16.6 *Niech $\{V_1; \langle\rangle_1\}$ i $\{V_2; \langle\rangle_2\}$ będą przestrzeniami euklidesowymi. Wówczas istnieje izomorfizm liniowy $f : V_1 \to V_2$, który jest izometrią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V_1 = \dim V_2$.*

Wniosek 16.7 *Każda przestrzeń euklidesowa jest izomorficzna z przestrzenią E^n.*

Definicja 16.8 *Macierz $M \in \mathbb{R}^n_n$ nazywamy* **ortogonalną** *gdy $M^T = M^{-1}$. ($MM^T = I$)*

Stwierdzenie 16.9 *Macierz M jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz M^T jest ortogonalna.*

Twierdzenie 16.10 *Niech $f \in L(E^n; E^n)$. Wówczas równoważne są warunki:*

1) f jest izometrią liniową.

2) Układ $\big(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_2)\big)$ jest bazą ortonormalną E^n.

3) Macierz przekształcenia f w bazie standardowej jest ortonormalna.

Wniosek 16.11 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie ciągiem wektorów z przestrzeni E^n. Wówczas $\mathcal{A}$ jest bazą ortonormalną wtedy i tylko wtedy, gdy $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ jest macierzą ortogonalną.*

Definicja 16.12 *Obrotem przestrzeni euklidesowej V nazywamy przekształcenie, które w pewnej bazie ortonormalnej $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ma macierz*

$$M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

φ nazywamy kątem obrotu zaś $\mathrm{lin}\{\alpha_3, ..., \alpha_n\}$osią obrotu.

Lemat 16.13 *Dla dowolnych kątów φ, ψ prawdziwy jest wzór:*

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) & 0 & \cdots & 0 \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Wniosek 16.14 *Składanie obrotów o tych samych osiach jest przemienne.*

Stwierdzenie 16.15 *Obrót jest izometrią liniową.*

Wykład 17

Stwierdzenie 17.1 *Wyznacznik przekształcenia euklidesowego jest równy ± 1.*

Twierdzenie 17.2 *Niech f będzie endomorfizmem euklidesowym przestrzeni E^2. Wówczas:*

1) Jeżeli $\det f = 1$ to f jest obrotem.

2) Jeżeli $\det f = -1$ to f jest symetrią względem prostej.

Lemat 17.3 *Niech $f \in L(E^n; E^n)$ będzie izometrią liniową. Jeżeli $A \subset E^n$ jest podprzestrzenią własną f to $A^\perp$ też.*

($f(A) \subset A \Rightarrow f(A^\perp) \subset A^\perp$).

Lemat 17.4 *Niech $f \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ będzie przekształceniem liniowym wówczas f ma podprzestrzeń własną wymiaru ≤ 2.*

Twierdzenie 17.5 (Strukturalne) *Niech $f \in L(E^n; E^n)$ będzie izometrią liniową. Wówczas istnieje baza ortonormalna $\mathcal{A}$ w której macierz f jest postaci:*

$$M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \cdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \cdots & & & & & \cdots & 0 \\ 0 & \dots & & -1 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \cdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & & & -1 & & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \dots & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & \cdots & 0 \\ 0 & \dots & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \dots & & & & \cos\varphi_t & -\sin\varphi_t \\ 0 & \cdots & & & \dots & & & & \sin\varphi_t & \cos\varphi_t \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 17.6 *Niech $M(f) \in \mathbb{R}_2^2$ będzie macierzą obrotu f o kąt φ w bazie standardowej zaś $\mathcal{A}$ dowolną bazą ortonormalną. Wówczas:*

1) jeżeli baza $\mathcal{A}$ jest zgodnie zorientowana ze standardową to $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(f)$.

2) jeżeli baza $\mathcal{A}$ jest przeciwnie zorientowana niż standardową to $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(f)^{-1}$ odpowiada obrotowi o kąt $-\varphi$.

Twierdzenie 17.7 *Niech $f : E^n \to E^n$ będzie przekształceniem euklidesowym wówczas f jest złożeniem co najwyżej n symetrii względem podprzestrzeni wymiaru $n-1$ (hiperpłaszczyzn).*

Definicja 17.8 *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V.*

1) Rzutem prostopadłym na W nazywamy rzut na W wzdłuż $W^{\perp}$.

2) Symetrią względem W (lub symetrią prostopadłą względem W) nazywamy symetrię względem W wzdłuż $W^{\perp}$.

Twierdzenie 17.9 *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V zaś $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_j)$ bazą ortogonalną W. Wówczas rzut prostopadły na W jest określony wzorem: $\pi(\alpha) = \sum_{i=1}^{j} \frac{\langle \alpha; \gamma_i \rangle}{\langle \gamma_i; \gamma_i \rangle} \gamma_i$.*

Twierdzenie 17.10 *Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym zaś $(w_1, w_2, \ldots, w_t)$ ciągiem wektorów z $\mathbb{R}^n$. Wówczas V jest przestrzenią rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych o macierzy*

$$M = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy } V^{\perp} = lin\ \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}.$$

Uogólniony algorytm ortogonalizacji Grama - Schmidta.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie ciągiem wektorów z przestrzeni euklidesowej $\{V ; \varphi\}$. Niech $W_j = \text{lin}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j\}$ Indukcyjnie budujemy ciąg:

1^0 $\gamma_1 = \alpha_1$.

2^0 $\gamma_j = \alpha_j - \pi_j(\alpha_j)$, gdzie $\pi_j \in L(W_j; W_j)$ jest rzutem prostopadłym na W_{j-1}.

Twierdzenie 17.11

1) Wektory uzyskane uogólnioną metodą Grama - Schmidta są parami prostopadłe.

2) Dla każdego j przestrzenie $\text{lin}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j\} = \text{lin}\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_j\}$ są równe.

3) Niezerowe wektory z ciągu $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_j)$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni $lin\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_j\}$.

Stwierdzenie 17.12 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej V. Jeżeli baza $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ powstała z bazy $\mathcal{A}$ metodą ortogonalizacji Grama - Schmidta to*

$$W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = W(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \|\beta_1\|^2 \cdot \|\beta_2\|^2 \cdot ... \cdot \|\beta_n\|^2.$$

Stwierdzenie 17.13 *Niech $A = [a_{i,j}]$ będzie macierzą symetryczną nieujemnie określoną. Jeżeli $a_{i,i} = 0$ to $\forall_j\, a_{i,j} = 0$.*

Dowód:
Niech $a_{i,i} = 0$ i $j < i$. Niech φ będzie funkcjonałem określonym macierzą A w bazie standardowej. Wówczas dla każdego $r \in \mathbb{R}$ zachodzi $0 \leq \varphi(e_j + re_i; e_j + re_i) = \varphi(e_j; e_j) + 2r\varphi(e_j; e_i) + r^2\varphi(e_i; e_i) = a_{j,j} + 2ra_{i,j} + r^2 a_{i,i} = a_{j,j} + 2ra_{j,i}$. Stąd $a_{i,j} = 0$.

□

Lemat 17.14 *Niech $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t)$ będzie ciągiem wektorów z przestrzeni euklidesowej E^n.*

Niech $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_t$. *Wówczas:*

1) Istnieje taka macierz dolna trójkątna $L \in \mathbb{R}^t_t$, mająca na głównej przekątnej same jedynki i taka, że wiersze macierzy LM są parami prostopadłe.

2) Istnieje taka macierz odwracalna i dolna trójkątna $L' \in \mathbb{R}^t_t$, że wiersze macierzy $L'M$ są parami prostopadłe i półunormowane.

Wynika z uogólnionego algorytmu ortogonalizacji Grama - Schmidta.

Macierzowy algorytm ortogonalizacji Grama - Schmidta.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t)$ będzie ciągiem wektorów z przestrzeni euklidesowej E^n.

Budujemy macierze: $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{bmatrix}$ i $M = [AA^T|A]$.

Oznaczmy $M = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} = [a_{i,j}]$

Dla $i = 1$ do t wykonuj
jeżeli $a_{i,i} \neq 0$
dla $j = i + 1$ do t wykonuj
$w_j := w_j - \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} w_i$

Czyli stosując operacje elementarne typu: "Dla $i < j$ od j-tego wiersza odejmujemy wielokrotność i-tego wiersza sprowadzamy macierz AA^T do postaci schodkowej.

Niech $M = [AA^T|A] \to [S|A'] = LM$. Wówczas macierz $LAA^T = U$ jest górna trójkątna. Teraz macierz $UL^T = LAA^TL^T = (LA)(LA)^T$ jest górna trójkątna i symetryczna a zatem diagonalna.

W otrzymanej macierzy $M = [AA^T|A] \to [S|A'] = LM$ wiersze macierzy A' są wektorami z uogólnionego algorytm ortogonalizacji Grama - Schmidta.

Przy rozwiązywaniu układu równań liniowych o macierzy A, aby uprościć rachunki (zmniejszyć złożoność obliczeniową algorytmu) stosuje się rozkład macierzy $A = LU$ na iloczyn macierzy dolnej trójkątnej L i górnej trójkątnej U. Następnie zamiast rozwiązywać $Ax^T = b^T$ rozwiązujemy parę: $Ly^T = b^T$ i $Ux^T = y^T$. ($Ax^T = LUx^T = Ly^T = b^T$). Najwygodniejsza sytuacja jest gdy $U = L^T$ czyli gdy występuje tak zwany rozkład Choleskiego. (André-Louis Cholesky 1875 - 1918).

Twierdzenie 17.15 (Cholesky) *Niech $A \in \mathbb{R}^n_n$. Wówczas istnieje macierz dolna trójkątna L taka, że $A = L \cdot L^T$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = A^T$ i funkcjonał dwuliniowy opisany macierzą A jest nieujemnie określony.*

Dowód:
$\Rightarrow$ Niech $A = L \cdot L^T$. Wtedy $A^T = \left(L \cdot L^T\right)^T = \left(L^T\right)^T \cdot L^T = L \cdot L^T = A$. Ponadto dla $\alpha \in \mathbb{R}^n$ $\alpha A \alpha^T = \alpha L \cdot L^T \alpha^T = \alpha L \left(\alpha L\right)^T \geq 0$ co daje nieujemne określenie funkcjonału.

$\Leftarrow$ Niech $A = A^T$ i φ określony wzorem $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha A \beta^T$ jest nieujemnie określony. Wtedy istnieje baza ortogonalna i półunormowana
$\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Zatem istnieje macierz odwracalna C taka, że $C^TAC = diag\left(\varphi(\alpha_1, \alpha_1), \varphi(\alpha_2, \alpha_2), ..., \varphi(\alpha_n, \alpha_n)\right) = D$. Ponieważ φ jest nieujemnie określony więc bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $D = diag(1, 1, ..., 1, 0, 0, ...0)$. Niech $B = \left(C^{-1}\right)^T D$. Wtedy $A = \left(C^{-1}\right)^T DC^{-1} = \left(C^{-1}\right)^T DD^TC^{-1} = BB^T$.

Zapiszmy macierz w postaci $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ i ortogonalizujmy uogólnioną metodą Grama - Schmidta. Istnieje zatem macierz dolna trójkątna L odwracalna i taka, że $LB = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = E$ składa się z wektorów parami ortogonalnych. Teraz $EE^T = diag\left(\beta_1\beta_1^T, \beta_2\beta_2^T, ..., \beta_n\beta_n^T\right) = F$ i $F = GG^T$
dla $G = diag\left(\|\beta_1\|, \|\beta_2\|, ..., \|\beta_n\|\right)$. Wyliczamy $LAL^T = LBB^TL^T = EE^T = GG^T$ więc $A = L^{-1}G\left(L^{-1}G\right)^T$ i macierz $L' = L^{-1}G$ jest dolna trójkątna.

□

algorytm rozkładu Choleskiego macierzy
Rozpisując iloczyn $A = LL^T$, otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Współczynniki macierzy A są zatem równe:

$$\begin{array}{rcl} a_{11} = l_{11}^2 & \to & l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ a_{21} = l_{21}l_{11} & \to & l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \\ a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 & \to & l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\ a_{32} = l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & \to & l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} \\ & \cdots & \end{array}$$

W ogólności:

$l_{ii} = \sqrt{\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)}$

$l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}l_{ik}}{l_{ii}}$ lub $l_{ji} = 0$ gdy $l_{ii} = 0$.

Wykład 18

Definicja 18.1 *Niech $f, g \in L(E^n; E^n)$.*
1) Przekształcenie g nazywamy sprzężonym do f gdy $\forall_{\alpha,\beta \in E^n}$ $\langle f(\alpha); \beta\rangle = \langle \alpha; g(\beta)\rangle$.
2) Przekształcenie liniowe f nazywamy **samosprzężonym** *gdy $\forall_{\alpha,\beta \in E^n}$ $\langle f(\alpha); \beta\rangle = \langle \alpha; f(\beta)\rangle$.*

Twierdzenie 18.2 *Niech $f : E^n \to E^n$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas równoważne są warunki:*
1) f jest samosprzężone.
2) Dla każdej bazy ortonormalnej $\mathcal{A}$ macierz $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest symetryczna.
3) Istnieje baza ortonormalna $\mathcal{A}$, dla której $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest macierzą symetryczną.

Lemat 18.3 *Niech $f : E^n \to E^n$ będzie przekształceniem samosprzężonym. Jeżeli podprzestrzeń $A \subset E^n$ jest niezmiennicza względem f to $A^\perp$ też jest niezmiennicza.*

Lemat 18.4 *Niech $f : E^n \to E^n$ będzie przekształceniem samosprzężonym. Jeżeli α, β sa wektorami własnymi f o różnych wartościach własnych to $\alpha \perp \beta$.*

Twierdzenie 18.5 *Dla każdego przekształcenia samosprzężonego $f : E^n \to E^n$ istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych f.*

Twierdzenie 18.6 *Jeżeli $M \in \mathbb{R}^n_n$ jest macierzą symetryczną to istnieje taka macierz ortogonalna C, że $C^{-1}MC$ jest macierzą diagonalną.*

Wniosek 18.7 *Macierz $M \in \mathbb{R}^n_n$ jest podobna do diagonalnej wtedy i tylko wtedy, gdy M jest podobna do macierzy symetrycznej.*

Twierdzenie 18.8 *Niech $A = A^T \in \mathbb{R}^n_n$ będzie macierzą symetryczną. Niech funkcjonał dwuliniowy $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będą określone tą samą macierzą symetryczną macierzą $A \in \mathbb{R}^n_n$.*

($G(\varphi; st) = A$) i ($M(f)^{st}_{st} = A$).

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą $\mathbb{R}^n$ złożoną z wektorów własnych f. Wówczas:

1) Jeżeli $\mathcal{A}$ jest bazą ortogonalną względem standardowego iloczynu skalarnego to $\mathcal{A}$ jest bazą ortogonalną względem φ. ($\alpha_i \perp \alpha_j \Rightarrow \varphi(\alpha_i, \alpha_j) = 0$)

2) Jeżeli $\mathcal{A}$ jest bazą ortogonalną względem φ i $r(A) \geq n - 1$ to $\mathcal{A}$ jest bazą ortogonalną względem standardowego iloczynu skalarnego.

($\varphi(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \Rightarrow \alpha_i \perp \alpha_j$)

Uwaga. Jeżeli $r(A) < n - 1$ to istnieje baza $\mathcal{A}$ ortogonalna względem φ i nie ortogonalna względem standardowego iloczynu skalarnego.

Wykład 20

Definicja 19.1 *Przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ afinicznej przestrzeni euklidesowej nazywamy izometrią gdy przekształcenie pochodne $f' : T(H) \to T(H)$ jest izometrią liniową.*

Stwierdzenie 19.2 *Przesunięcie w afinicznej przestrzeni euklidesowej jest izometrią.*

Definicja 19.3 *Symetrią względem hiperpłaszczyzny A nazywamy symetrię przestrzeni $E(R^n)$ względem podprzestrzeni A wymiaru $n - 1$ wzdłuż $A^\perp$.*

Macierzą symetrii względem hiperpłaszczyzny w układzie bazowym

$$\mathcal{A} = (p\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \text{ jest } M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right],$$

gdzie wektory α_i tworzą bazę ortonormalną przestrzeni E^n i $A = p + \mathrm{lin}\{\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n\}$.

Obrotem w przestrzeni $E(R^n)$ nazywamy taką izometrię, która w pewnym układzie bazowym $\mathcal{A} = (p\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, gdzie wektory α_i tworzą bazę *ortonormalną przestrzeni E^n, ma macierz* $M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{cccccc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{array}\right]$.

φ nazywamy kątem obrotu zaś $W = p + \operatorname{lin}\{\alpha_3, ..., \alpha_n\}$ osią obrotu.

Twierdzenie 19.4 *Niech $f : H \to H$ będzie izometrią przestrzeni afinicznej. Wówczas f ma punkt stały lub prostą niezmienniczą na której f jest przesunięciem.*

Dokładniej $\exists_{p\in E(R^n)}\exists_{\alpha\in S(R^n)}\ f(p) = p \vee \forall_{k\in R} f(p + k\alpha) = p + k\alpha + \alpha$.

Dowód:
Niech $f' \in L(E^n; E^n)$ będzie pochodną f. Definiujemy podprzestrzeń $U = \{\alpha \in E^n \,|\, f'(\alpha) = \alpha\}$ oraz $W = U^{\perp}$. Wówczas $E^n = U \oplus W$ jest rozkładem na podprzestrzenie niezmiennicze. Ponadto $\ker(f' - id) = U$ i $(f' - id)(W) \subset W$ więc $(f' - id)$ jest izomorfizmem przestrzeni W. Niech $f(\theta) = \theta + \alpha + \beta$, gdzie $\alpha \in U$ i $\beta \in W$. Zatem istnieje $\gamma \in W$ taki, że $(f' - id)(\gamma) = -\beta$. Teraz dla punktu $p = \theta + \gamma$ i $r \in \mathbb{R}$ otrzymujemy:

$f(p+r\alpha) = f(\theta+\gamma+r\alpha) = f(\theta)+f'(\gamma+r\alpha) = \theta+\alpha+\beta+(\gamma-\beta+r\alpha) = \theta + \gamma + (r + 1)\alpha = p + (r + 1)\alpha$

Jeżeli $\alpha = \theta$ to p jest punktem stałym zaś jeżeli $\alpha \neq \theta$ to $p + \operatorname{lin}\{\alpha\}$ jest żądaną prostą.

□

Lemat 19.5 *Niech f będzie izometrią przestrzeni $E(R^n)$ bez punktów stałych. Wówczas istnieje baza ortonormalna $\mathcal{A} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ i taki układ bazowy $\mathcal{B} = (p\,; \alpha_1, ..., \alpha_n)$ w którym macierz f ma postać* $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & A & \theta^T \\ \hline 0 & \theta & 1 \end{array}\right]$.

Dowód:
Niech $p + \operatorname{lin}\{\alpha\}$ będzie prostą niezmienniczą na której f działa jako przesunięcie o wektor α. Wybieramy taką bazę ortonormalną $\mathcal{A} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ przestrzeni $T(H)$ by $\alpha_1 = \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$.

Podprzestrzeń $W = \operatorname{lin}\{\alpha_2, ..., \alpha_n\} = \operatorname{lin}\{\alpha_1\}^{\perp}$ jest f' niezmiennicza bo jest prostopadła do przestrzeni niezmienniczej $\operatorname{lin}\{\alpha_1\}$. Teraz, dla $a = \|\alpha\|$ mamy $f(p) = p + a\alpha_1$ i $M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & A & \theta^T \\ \hline 0 & \theta & 1 \end{array}\right]$ gdy A jest macierzą $f'_{|W}$ w bazie $(\alpha_2, ..., \alpha_n)$.

□

Definicja 19.6 *Izometrię f przestrzeni $E(R^n)$ nazywamy parzystą, gdy wyznacznik funkcji pochodnej $\det f' = 1$ a nieparzystą, gdy wyznacznik funkcji pochodnej $\det f' = -1$.*

Stwierdzenie 19.7 *Obrót jest izometrią parzystą zaś symetria względem hiperpłaszczyzny jest izometrią nieparzystą.*

Klasyfikacja izometrii przestrzeniach afinicznych E^n dla $n \leq 3$.

Z punktem stałym

wymiar	parzyste	nieparzyste
1	identyczność	symetria środkowa
2	obrót $\left[\begin{array}{cc\|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$	symetria osiowa $\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$
3	obrót $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$	symetria płaszczyznowa $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ obrót z odbiciem $\left[\begin{array}{ccc\|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Bez punktu stałego

n	parzyste	nieparzyste
1	przesunięcie	brak
2	przesunięcie $\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$	symetria z poślizgiem $\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$
3	obrót z poślizgiem $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$	symetria płaszczyznowa z poślizgiem $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Wykład 21

Przestrzenie metryczne.

Definicja 20.1 Przestrzenią metryczną *nazywamy niepusty zbiór P wraz z funkcją $\varrho : P \times P \to \mathbf{R}^+$ w liczby rzeczywiste nieujemne spełniającą warunki:*
1) $\forall_{p,q\in P}\ \varrho(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.
2) $\forall_{p,q\in P}\ \varrho(p,q) = \varrho(q,p)$.
3) $\forall_{p,q,s\in P}\ \varrho(p,q) + \varrho(q,s) \geq \varrho(p,s)$.
Funkcję ϱ nazywamy metryką.

Przykład 20.2 *Niech P będzie niepustym zbiorem. Określmy funkcję ϱ wzorem:*

$$\varrho(p,q) = \begin{cases} 0 & p = q \\ 1 & p \neq q \end{cases}.$$

Wówczas ϱ jest metryką zwaną dyskretną.

Twierdzenie 20.3 *Odległość w przestrzeniach afinicznych euklidesowych jest metryką - zwaną metryką euklidesową.*

Przykład 20.4 *Przykładami metryk na $\mathbb{R}^n$ są:*
1) Metryka miejska,

$$\varrho_M\left((p_1,p_2,...,p_n),(q_1,q_2,...,q_n)\right) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + ...|p_n - q_n|.$$

2) Metryka Max
$\mathcal{M}\left((p_1, p_2, ..., p_n), (q_1, q_2, ..., q_n)\right) = Max\{|p_i - q_i| \; ; \; 1 \leq i \leq n\}$.
3) Metryka węzła kolejowego.

Twierdzenie 20.5
a) Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}^n$ *zachodzi:* $\mathcal{M}(p, q) \leq \|q - p\| \leq \varrho_M(p, q) \leq n\mathcal{M}(p, q)$.
b) Metryki: euklidesowa, miejska i Max wyznaczają tą samą topologię.
c) Metryki: euklidesowa i węzła kolejowego nie wyznaczają tej samej topologii.

Stwierdzenie 20.6 *Podprzestrzenie przestrzeni metrycznych są przestrzeniami metrycznymi. Dokładniej: Niech* $\{X; \varrho\}$ *będzie przestrzenią metryczną z metryką* ϱ *zaś* Y *będzie niepustym podzbiorem* X. *Wówczas* $\{Y : \varrho_{|Y}\}$ *wraz z metryką* ϱ *obciętą do* Y *jest przestrzenią metryczną.*

Definicja 20.7 *Izometrią nazywamy przekształcenie między dwiema przestrzeniami metrycznymi zachowujące odległość. Dokładniej: Jeżeli* $\{P_1 ; \varrho_1\}$ *i* $\{P_2 ; \varrho_2\}$ *to* $f : P_1 \to P_2$ *jest izometrią gdy* $\forall_{p,q \in P_1} \; \varrho_1(p, q) = \varrho_2(f(p), f(q))$.

Twierdzenie 20.8 *Izometrie są przekształceniami różnowartościowymi.*

Twierdzenie 20.9 *Złożenie izometrii jest izometrią.*

Twierdzenie 20.10 *Izometrie przestrzeni* R^n *z metryką euklidesową są przekształceniami afinicznymi.*

Przykład 20.11 *Niech* $X = [A, B]$ *będzie odcinkiem domkniętym w przestrzeni* $E(R^n)$ *zaś* $Y = [A, B) \subset X$. *Wówczas włożenie* $f : Y \to X$ *jest izometrią, nie jest "na" (nie jest surjekcją) ale jest epimorfizmem w kategorii przestrzeni metrycznych. Dokładniej: Dla dowolnej przestrzeni metrycznej* Z *i izometrii* $g_1, g_2 : X \to Z$ *zachodzi* $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$.

Twierdzenie 20.12 *Izometrie są przekształceniami ciągłymi.*

Wielomiany n zmiennych

Definicja 20.13 *Algebrą wielomianów zmiennych* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o współczynnikach z ciała* K *nazywamy przestrzeń liniową* $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ *nad ciałem* K *o bazie złożonej z wyrażeń* $x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}$, *gdzie* $i_1, i_2, ..., i_n$ *są liczbami naturalnymi zaś jednomian* $x_1^0 x_2^0 ... x_n^0 = 1$ *utożsamiamy z jedynką ciała* K.

Wielomianem nazywamy każdy wektor czyli skończoną kombinację liniową

$$w(x) = w(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i_1, i_2, ..., i_n} k_{i_1, i_2, ..., i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}$$

Iloczynem wielomianów określamy przez iloczyn elementów bazy zgodnie ze wzorem: $x_1^{i_1}x_2^{i_n}...x_n^{i_n} \cdot x_1^{j_1}x_2^{j_2}...x_n^{j_n} = x_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}...x_n^{i_n+j_n}$, *a następnie rozszerzamy na wszystkie wielomiany stosując rozdzielność mnożenia względem dodawania.*

Definicja 20.14 *Stopniem wielomianu* $w(x) = \sum_{i_1,i_2,...,i_n} k_{i_1,i_2,...,i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_n^{i_n}$ *nazywamy największą z liczb* $i_1 + i_2 + ... + i_n$, *dla których współczynnik* $k_{i_1,i_2,...,i_n} \neq 0$ *i oznaczamy* $st\, w(x)$. *Jeżeli* $w(x) = \theta$ *jest wielomianem zerowym to przyjmujemy* $st\, w(x) = -\infty$.

Twierdzenie 20.15 *Niech* $w(x), v(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$. *Wówczas:*
1) $st\ (w(x) + v(x)) \leq max\,(st\, w(x), st\, v(x))$.
2) $st\ (w(x) \cdot v(x)) = st\, w(x) + st\, v(x)$.

Wykład 21

Definicja 21.1 *Formą stopnia m nazywamy podprzestrzeń* $FK[x_1, x_2, ..., x_n]_m = \mathrm{lin}\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_n^{i_n} \mid i_1+i_2+...+i_n = m\} \subset K[x_1, x_2, ..., x_n]$ *rozpiętą na jednomianach stopnia m. Formy stopnia 1 nazywamy liniowymi a formy stopnia 2 kwadratowymi.*

Oznaczenie. Podprzestrzeń wielomianów stopnia $\leq m$ będziemy oznaczać
$K[x_1, x_2, ..., x_n]_m = \{w(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n] \mid st\, w(x) \leq m\}$.

Twierdzenie 21.2
1) $K[x_1, x_2, ..., x_n]_m = \bigoplus_{i=0}^{m} FK[x_1, x_2, ..., x_n]_i$.

2) $K[x_1, x_2, ..., x_n] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} FK[x_1, x_2, ..., x_n]_i$.

Definicja 21.3
Przekształcenie $f : K^n \to K$ *nazywamy* **funkcja wielomianową** *gdy istnieje wielomian* $w(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ *taki, że* $\forall_{(a_1,a_2,...,a_n)\in K^n}\ f(a_1, a_2, ..., a_n) = w(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Twierdzenie 21.4 *Jeżeli K jest ciałem nieskończonym to funkcji wielomianowej odpowiada dokładnie jeden wielomian z* $K[x_1, x_2, ..., x_n]$.

Bez dowodu.

Przykład 21.5 *Niech* $K = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *będzie ciałem skończonym. Wówczas wielomiany* $w(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$ *i zerowy wyznaczają tą samą funkcje wielomianową na K.*

Twierdzenie 21.6
1) Jeżeli $w(x), v(x) \in FK[x_1, x_2, ..., x_n]_1$ *wyznaczają tą samą funkcję wielomianową to* $w(x) = v(x)$.
2) Jeżeli $w(x), v(x) \in FK[x_1, x_2, ..., x_n]_2$ *wyznaczają tą samą funkcję wielomianową to* $w(x) = v(x)$.

Analog twierdzenia 21.6 dla większych stopni nie jest prawdziwy.

Przykład 21.7 *Niech* $n > 2$ *i* K *będzie ciałem dwuelementowym wówczas* $w(x) = x_1 x_2^{n-1} + x_1^{n-1} x_2 \in FK[x_1, x_2]_n$ *wyznacza funkcję zerową.*

Twierdzenie 21.8 *Niech* K *będzie ciałem charakterystyki* $\neq 2$ $(1+1 \neq 0)$ *zaś* $\mathcal{S} = \{M \in K_n^n \mid M = M^T\}$ *przestrzenią liniową macierzy symetrycznych nad* K *rozmiaru* n. *Wówczas przekształcenie* $\varphi : \mathcal{S} \to FK[x_1, x_2, ..., x_n]_2$ *określone wzorem* $\varphi(M) = [x_1, x_2, ..., x_n] M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *jest izomorfizmem liniowym.*

Definicja 21.9 *Niech* K *będzie ciałem charakterystyki* $\neq 2$ $(1+1 \neq 0)$.
Macierzą formy kwadratowej $w(x) \in FK[x_1, x_2, ..., x_n]_2$ *nazywamy taką macierz symetryczną* $M = M(w)$, *że* $w(x_1, x_2, ..., x_n) = [x_1, x_2, ..., x_n] M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Stwierdzenie 21.10 *Niech* $M = [b_{i,j}] \in K_n^n$ *będzie macierzą formy kwadratowej* $w(x)$. *Wówczas:*
$\forall_i \; b_{i,i} = w(e_i)$
$i \neq j \Rightarrow b_{i,j} = \frac{1}{4}[w(e_i + e_j) - w(e_i - e_j)]$

Definicja 21.11 *Powiemy, że funkcje* $f, g : K^n \to K$ *są równoważne jeżeli istnieje automorfizm liniowy* $\varphi : K^n \to K^n$ *dla, którego* $f = g \circ \varphi$
Dwie formy kwadratowe $w(x), v(x)$ *nazywamy równoważnymi gdy odpowiadające im funkcje wielomianowe są równoważne.*

Stwierdzenie 21.12 *Relacja równoważności między formami kwadratowymi jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

Wykład 22

Na tym wykładzie pracujemy tylko nad ciałami charakterystyki $\neq 2$.

Twierdzenie 22.1 *Dwie formy kwadratowe $w(x), v(x)$ sa równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ich macierze są kongruentne.*

Wniosek 22.2 *Niech $w(x) \in FK[x_1, x_2, ..., x_n]_2$ będzie formą kwadratową. Wówczas istnieje izomorfizm liniowy $\varphi : K^n \to K^n$ taki, że $(w \circ \varphi)(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + ... + a_nx_n^2$.*

Definicja 22.3 *Niech V będzie przestrzenią afiniczną nad ciałem K wymiaru $n < \infty$. Funkcję $f : V \to K$ nazywamy wielomianową jeżeli istnieje wielomian $w(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ i układ bazowy $\mathcal{A} = (p\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ przestrzeni V taki, że jeżeli $q = p + \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \in V$ to $f(q) = w(a_1, a_2, ..., a_n)$.*

Oznaczenie. Niech $\mathcal{A} = (p\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie układem bazowym przestrzeni afinicznej V nad ciałem K wymiaru $n < \infty$. Jeżeli $w(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ to symbolem $w_{\mathcal{A}}(x)$ oznaczać będziemy funkcję wielomianową określoną wzorem $w_{\mathcal{A}}(p + \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i) = w(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Definicja 22.4 *Niech V będzie przestrzenią afiniczną nad ciałem K.*

Podzbiór $H \subset V$ nazywamy **zbiorem algebraicznym**, *jeżeli istnieją funkcje wielomianowe $f_1, f_2, ..., f_t$ na przestrzeni V takie, że*

$H = \{p \in V \mid f_1(p) = 0,\ f_2(p) = 0, ...,\ f_t(p) = 0\}$

Jeżeli $t = 1$ H nazywamy **hiperpowierzchnią**.

Hiperpowierzchnię nazywamy **właściwą** *jeżeli nie jest zawarta w żadnej podprzestrzeni V mniejszego wymiaru.* $(\mathrm{af}(H) = V)$

Stwierdzenie 22.5 *Jeżeli $K = \mathbb{R}$ jest ciałem liczb rzeczywistych to każdy zbiór algebraiczny jest hiperpowierzchnią.*

Lemat 22.6 *Niech $w(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ będzie wielomianem, $\mathcal{A} = (p_1\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ i $\mathcal{B} = (p_2\,; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ układami bazowymi przestrzeni afinicznej V nad ciałem K zaś $\varphi : V \to V$ izomorfizmem afinicznym przeprowadzającym układ $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$. Oznaczmy: $\varphi(p_1) = p_2 = p_1 + \sum_{i=1}^{n}\ c_i\alpha_i$, i $\varphi^{'}(\alpha_j) = \beta_j = \sum_{i=1}^{n}\ a_{i,j}\alpha_i$.*
Niech $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n}\ a_{i,j}x_j + c_i$ i $v(x_1, x_2, ..., x_n) = w(f_1, f_2, ..., f_n)$

Wówczas:

1) $v(x_1, x_2, ..., x_n) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ i $\mathrm{st}\, w = \mathrm{st}\, v$,

2) $\forall_{q \in V}\ w_{\mathcal{A}}(q) = v_{\mathcal{B}}(q)$, $(w_{\mathcal{A}} = v_{\mathcal{B}})$,

3) $\forall_{q \in V}\ v_{\mathcal{A}}(q) = [w_{\mathcal{A}} \circ \varphi](q)$, $(v_{\mathcal{A}} = w_{\mathcal{A}} \circ \varphi)$

Dowód:

Zapiszmy w obu układach bazowych punkt $q = p_1 + \sum_{i=1}^{n}\ a_i\alpha_i =$

$= p_2 + \sum_{j=1}^{n} \ b_j\beta_j = p_1 + \sum_{i=1}^{n} \ c_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \ b_j \left(\sum_{i=1}^{n} \ a_{i,j}\alpha_i\right) =$
$= p_1 + \sum_{i=1}^{n} \left(c_i + \sum_{j=1}^{n} \ b_j a_{i,j}\right) \alpha_i.$

Zatem $\forall_{1\leq i\leq n} \ a_i = c_i + \sum_{j=1}^{n} \ b_j a_{i,j} = f_i(b_1, b_2, ..., b_n).$

Ad 2) $w_{\mathcal{A}}(q) = w(a_1, a_2, ..., a_n) = w(f_1, f_2, ..., f_n)(b_1, b_2, ..., b_n) =$
$= v(b_1, b_2, ..., b_n) = v_{\mathcal{B}}(q).$

Ad 3) $v_{\mathcal{A}}(q) = v(a_1, a_2, ..., a_n) =$
$= w\left(\sum_{j=1}^{n} \ a_1 a_{1,j} + c_1, \ \sum_{j=1}^{n} \ a_2 a_{2,j} + c_2, ..., \sum_{j=1}^{n} \ a_n a_{n,j} + c_n\right) = [w_{\mathcal{A}} \circ \varphi](q).$

Lub odwrotnie
$[w_{\mathcal{A}} \circ \varphi](q) = w_{\mathcal{A}}\left(\varphi(q)\right) = w_{\mathcal{A}}\left(\varphi(p_1 + \sum_{i=1}^{n} \ a_i\alpha_i)\right) = w_{\mathcal{A}}\left(p_2 + \sum_{j=1}^{n} \ a_j\beta_j\right) =$

$= w_{\mathcal{A}}\left(p_1 + \sum_{i=1}^{n} \ c_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \ a_j \left(\sum_{i=1}^{n} \ a_{i,j}\alpha_i\right)\right) =$
$= w_{\mathcal{A}}\left(p_1 + \sum_{i=1}^{n} \ \left(c_i + \ \sum_{j=1}^{n} \ a_j a_{i,j}\right) \alpha_i\right) =$
$= w\left(c_1 + \ \sum_{j=1}^{n} a_j \ a_{1,j}, \ c_2 + \ \sum_{j=1}^{n} a_j \ a_{2,j}, ..., c_n + \ \sum_{j=1}^{n} a_j \ a_{n,j}\right) =$
$= w(f_1, f_2, ..., f_n)(a_1, a_2, ..., a_n) = v(a_1, a_2, ..., a_n) = v_{\mathcal{A}}(q)$

$\square$

Definicja 22.7 *Podzbiory algebraiczne X_1 i X_2 przestrzeni afinicznej V nad ciałem K nazywamy* **afinicznie równoważnymi** *jeżeli istnieje izomorfizm afiniczny $\varphi : V \to V$, przy którym $\varphi(X_1) = X_2$. Mówimy również, że zbiory X_1 i X_2 mają ten sam typ afiniczny.*

Twierdzenie 22.8 *Niech X_1 i X_2 będą hiperpowierzchniami w przestrzeni afinicznej V. Wówczas równoważne są warunki:*
1) X_1 i X_2 są afinicznie równoważne.
2) Jeżeli $X_1 = \{p \in V \mid w_{\mathcal{A}}(p) = 0\}$ dla pewnego wielomianu $w(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ i pewnego układu bazowego $\mathcal{A}$ to istnieje taki układ bazowy $\mathcal{B}$, że $X_2 = \{p \in V \mid w_{\mathcal{B}}(p) = 0\}$.
3) Istnieje taki wielomian $w(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ i takie układy bazowe $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ przestrzeni V, że $X_1 = \{p \in V \mid w_{\mathcal{A}}(p) = 0\}$ i $X_2 = \{p \in V \mid w_{\mathcal{B}}(p) = 0\}$.

Dowód:
1) $\Rightarrow$ 2)
Niech $X_1 = \{p \in V \mid w_{\mathcal{A}}(p) = 0\}$ dla pewnego wielomianu $w(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ i pewnego układu bazowego $\mathcal{A} = (p_1 \, ; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$
Niech $f : V \to V$ będzie izomorfizmem afinicznym takim, że $f(X_1) = X_2$. Wówczas $X_2 = f(X_1) = \{f(p) \mid p \in X_1\} = \{f(p) \mid w_{\mathcal{A}}(p) = 0\} =$ $\{q \mid w_{\mathcal{A}}\left(f^{-1}(q)\right) = 0\} = \{q \mid \ \left(w_{\mathcal{A}} \circ f^{-1}\right)(q) = 0\} = \{q \in V \mid w_{\mathcal{B}}(q) = 0\}$, gdzie $\mathcal{B} = (p_2 \, ; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \left(f(p_1) \, ; f'(\alpha_1), f'(\alpha_2), ..., f'(\alpha_n)\right)$
2) $\Rightarrow$ 3) Oczywiste

3) $\Rightarrow$ 1) Niech $\mathcal{A} = (p_1\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ i $\mathcal{B} = (p_2\,; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$.
Niech f będzie izomorfizmem afinicznym określonym wzorem:
$f(p_1) = p_2\,; f'(\alpha_1) = \beta_1, f'(\alpha_2) = \beta_2, ..., f'(\alpha_n) = \beta_n$. Wówczas:
$f(X_1) = \{f(p) \mid p \in X_1\} = \{f(p) \mid w_{\mathcal{A}}(p) = 0\} = \{q \mid w_{\mathcal{A}}(f^{-1}(q)) = 0\} =$
$= \{q \mid (w_{\mathcal{A}} \circ f^{-1})(q) = 0\} = \{q \in V \mid w_{\mathcal{B}}(q) = 0\} = X_2$

$\square$

Zobaczmy co się dzieje gdy jeden z układów nazwiemy standardowym. Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem wyjaśniającym zależności między współrzędnymi punktu w różnych układach bazowych.

Stwierdzenie 22.9 *Niech $\varphi : K^n \to K^n$ będzie izomorfizmem afinicznym o wzorze analitycznym $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1, f_2, ..., f_n)$, gdzie $f_i \in K[x_1, x_2, ..., x_n]_1$. Niech układ bazowy $\mathcal{A} = (p\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie określony wzorem: $p = \varphi(\Theta)$, $\forall_{1 \le i \le n}\ \alpha_i = \varphi'(e_i)$. Wówczas:*

1) Współrzędnymi punktu $\varphi(q) = (q_1, q_2, ..., q_n)$ w układzie bazowym $\mathcal{A}$ są $q_1, q_2, ..., q_n$.

2) Współrzędnymi punktu $\varphi(q) = (q_1, q_2, ..., q_n)$ w standardowym układzie bazowym są $f_1(q_1, q_2, ..., q_n), f_2(q_1, q_2, ..., q_n), ..., f_n(q_1, q_2, ..., q_n)$.

*3) Współrzędnymi punktu $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ w układzie bazowym $\mathcal{A}$ są $g_1(q_1, q_2, ..., q_n), g_2(q_1, q_2, ..., q_n), ..., g_n(q_1, q_2, ..., q_n)$,
gdzie $\varphi^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = (g_1, g_2, ..., g_n)$*

Stwierdzenie 22.10 *Niech $\varphi : K^n \to K^n$ będzie izomorfizmem afinicznym zaś $\mathcal{A} = (p\,; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie układem bazowym określonym wzorem: $p = \varphi(\Theta)$, $\forall_{1 \le i \le n}\ \alpha_i = \varphi(e_i)$. Niech $H = \{q \in K^n \mid w(q) = 0\}$ będzie hiperpowierzchnią. Wówczas:*

0) $H = \{q \in K^n \mid w_{st}(q) = 0\}$.

1) $\varphi(H) = \{q \in K^n \mid w_{\mathcal{A}}(q) = 0\}$.

2) $\varphi(H) = \{q \in K^n \mid (w \circ \varphi^{-1})_{st}(q) = 0\}$.

3) $H = \{q \in K^n \mid (w \circ \varphi)_{\mathcal{A}}(q) = 0\}$

Przykład 22.11 *Niech $H \subset \mathbb{R}^3$ będzie paraboloidą hiperboliczną opisaną równaniem $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie izomorfizmem afinicznym opisanym macierzą* $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. *Wtedy* $M(\varphi^{-1}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.
*Niech $\mathcal{A} = (p = \varphi(\theta) = (1, 0, 2)\,; \alpha_1 = \varphi'(e_1) = (0, 0, 1)$,
$\alpha_2 = \varphi'(e_2) = (4, 3, 2)$, $\alpha_3 = \varphi'(e_3) = (5, 4, 3))$ będzie układem bazowym.*

Hiperpowierzchnia $\varphi(H)$ jest opisana w układzie bazowym $\mathcal{A}$ równaniem $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$ bo dla każdego $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ punkt $\varphi(a, b, c)$ ma współrzędne a, b, c w układzie $\mathcal{A}$.

Hiperpowierzchnia $\varphi(H)$ jest opisana w standardowym układzie bazowym równaniem $(x_1 - 2x_2 + x_3 - 3)^2 - (4x_1 - 5x_2 - 4)^2 + (-3x_1 + 4x_2 + 3) = 0$.

Hiperpowierzchnia H jest opisana w układzie bazowym $\mathcal{A}$ równaniem $(4x_2+5x_3+1)^2-(3x_2+4x_3)^2+(x_1+2x_2+3x_3+2)=0$.

Wykład 23

Twierdzenie 23.12 *Niech K będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$ zaś $T=\{M\in K^{n+1}_{n+1}\mid M=M^T\}$ przestrzenią macierzy symetrycznych. Wówczas przyporządkowanie $\psi: T\to K[x_1,x_2,...,x_n]_2$ macierzom wielomianów stopnia ≤ 2 zadane wzorem :*

$$\psi([a_{i,j}])=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}2a_{i,n+1}x_i+a_{n+1,n+1}$$

jest izomorfizmem liniowym.

Wniosek 23.13 *Jeżeli charakterystyka ciała $\neq 2$ to przyporządkowanie wielomianom stopnia ≤ 2 ich funkcji wielomianowej jest izomorfizmem liniowym.*

Definicja 23.14 *Hiperpowierzchnią* **stopnia 2** *w przestrzeni afinicznej V nazywamy hiperprzestrzeń opisaną wielomianem stopnia 2. Czyli jest zbiorem miejsc zerowych wielomianu stopnia 2.*

Twierdzenie 23.15 *Niech X będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 w przestrzeni afinicznej V wymiaru n nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Wówczas istnieje taki układ bazowy $\mathcal{A}$, że $X=\{p\in V\mid w_{\mathcal{A}}(p)=0\}$, gdzie wielomian $w(x)$ jest jednego z dwóch typów:*

$$1)\quad w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2+a,$$

$$2)\quad w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_i^2+x_n.$$

Algorytm dopełniania do kwadratów.

Dany wielomian $w(x)=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{i,j}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c\in K[x_1,x_2,...,x_n]$

1) Dopóki w wielomianie występują wyrażenia mieszane x_ix_j wykonuj:

2) Jeżeli w wielomianie występuje wyrażenia mieszane x_ix_j oraz x_i^2 $(a_{i,j}\neq 0\neq a_{i,i})$ z wielomianu wydzielamy kwadrat

$$a_{i,i}y_i^2=a_{i,i}\left(x_i+\sum_{j\neq i}\frac{a_{i,j}}{2a_{i,i}}x_j+\frac{b_i}{2a_{i,i}}\right)^2$$

.

3) Jeżeli w wielomianie występuje wyrażenia mieszane $x_i x_j$ ale nie ma x_i^2 ani x_j^2 podstawiamy $x_i = y_i + y_j$ i $x_j = y_i - y_j$.

4) Dopóki w wielomianie występują pary x_i oraz x_i^2 z wielomianu wydzielamy kwadrat

$$a_{i,i} y_i^2 = a_{i,i} \left(x_i + \frac{b_i}{2a_{i,i}} \right)^2$$

.

5) Jeżeli otrzymaliśmy wyrażenie postaci $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2 + a$ lub $\sum_{i=1}^{n-1} a_i y_i^2 + x_n$ to STOP. W przeciwnym przypadku całą część wielomianu stopnia ≤ 1 zamieniamy na zmienną y_n.

Przykład 23.16 *Szukamy postaci kanonicznej hiperpowierzchni opisanej wielomianem* $H = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid w(p) = 0\}$*, gdzie*

$w(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_1 + x_3^2 + 4x_3 + 5$

Sposób 1) Eliminujemy zmienne mieszane w porządku leksykograficznym. Zaczynamy od podstawienia $x_1 = y_1 + y_2$ *i* $x_2 = y_1 - y_2$

$w(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_1 + x_3^2 + 4x_3 + 5 =$

$(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)x_3 + x_3^2 - 6(y_1 + y_2) + 4x_3 + 5 =$

$y_1^2 - y_2^2 + 2x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3^2 - 6y_1 - 6y_2 + 4x_3 + 5 =$

$(y_1 + x_3 - 3)^2 - (y_2 - x_3 + 3)^2 + x_3^2 + 4x_3 + 5 =$

$(y_1 + x_3 - 3)^2 - (y_2 - x_3 + 3)^2 + (x_3 + 2)^2 + 1$

Teraz wracamy do pierwotnych zmiennych $y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ *i* $y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$

$w(x) = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + 3\right)^2 + (x_3 + 2)^2 + 1$

Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *będzie określone wzorem*

$f([x_1, x_2, x_3]) = [\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 3,\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + 3,\ x_3 + 2]$. *Wówczas* f *jest izomorfizmem afinicznym i*

$f^{-1}([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + x_2,\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 10,\ x_3 - 2]$.

Dla $v(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1$ $w(x) = (v \circ f)(x)$ *i* $v(x) = (w \circ f^{-1})(x)$. *Stąd* $f(H) = \{f(p) \mid w(p) = 0\} = \{q \mid w(f^{-1}(q)) = 0\}$.

Ostatecznie $f(H) = \{[x_1, x_2, x_3] \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0\}$.

Wybierzmy nowy układ bazowy

$\mathcal{A} = (f(\Theta); f'(e_1), f'(e_2), f'(e_3)) = \left([-3, 3, 2];\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (1, -1, 1)\right)$.

Wtedy, dla $p = [a_1, a_2, a_3]$ *i* $f(p) = [b_1, b_2, b_3]$

$w_{\mathcal{A}}([b_1, b_2, b_3]) = w_{\mathcal{A}}(f(p)) = w_{\mathcal{A}}(f(\Theta) + a_1f'(e_1) + a_2f'(e_2) + a_3f'(e_n)) =$

$= w(a_1, a_2, a_3) = (v \circ f)(a_1, a_2, a_3) = v(f(a_1, a_2, a_3)) = v(b_1, b_2, b_3) =$

$= b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 + 1.$

Możemy też utożsamiać wielomian $w(x)$ *z funkcją wielomianową w standardowym układzie bazowym* $st = (\Theta; e_1, e_2, e_3)$ *i wtedy* $w_{st}(x) = v_{\mathcal{B}}(x)$*, gdzie* $\mathcal{B} = ([0, 10, -2];\ (1, 1, 0), (1, -1, -2), (0, 0, 1))$ *jest obrazem standardowego układu bazowego przy izomorfizmie* f^{-1}.

Sposób 2) Eliminujemy zmienne mieszane zaczynając od x_3.

$x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_1 + x_3^2 + 4x_3 + 5 = (x_1 + x_3 + 2)^2 - x_1^2 + x_1x_2 - 10x_1 + 1 =$

$(x_1 + x_3 + 2)^2 - \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 5\right)^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - 5x_2 + 26 =$

$(x_1+x_3+2)^2-\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+5\right)^2+\frac{1}{4}(x_2-10)^2+1=$
$(x_1+x_3+2)^2-\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+5\right)^2+\left(\frac{1}{2}x_2-5\right)^2+1$

Tym razem dla izomorfizmu afinicznego $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *będzie określone wzorem*

$g([x_1,x_2,x_3])=[x_1+x_3+2,\ x_1-\frac{1}{2}x_2+5,\ \frac{1}{2}x_2-5]$ *i układu bazowego* $\mathcal{A}=(g(\Theta)\,;g'(e_1),g'(e_2),g'(e_3))=\left([2,5,-5]\,;\ (1,1,0),(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,0,0)\right)$ *otrzymujemy:*

$g(H)=\{[x_1,x_2,x_3]\mid x_1^2-x_2^2+x_3+1=0\}$ *i*

$w_{\mathcal{A}}([x_1,x_2,x_3])=x_1^2-x_2^2+x_3^2+1.$

Ponieważ $g^{-1}([x_1,x_2,x_3])=[x_2+x_3,\ 2x_3+10,\ x_1-x_2-x_3-2]$ *więc dla układu bazowego* $\mathcal{B}=([0,10,-2]\,;\ (0,0,1),(1,0,-1),(1,2,-1))$ *otrzymujemy:*

$w_{st}(x)=v_{\mathcal{B}}(x).$

Twierdzenie 23.17 *Niech X będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 w przestrzeni afinicznej V wymiaru n nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Wówczas istnieje taki układ bazowy $\mathcal{A}$, że $X=\{p\in V\mid w_{\mathcal{A}}(p)=0\}$, gdzie wielomian w jest jednego z następujących typów:*

a1) $w(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2+1,\ 0<r\le n,$

a2) $w(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2,\ 0<r\le n,$

b1) $w(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_s^2,\ 0<r<s\le n,\quad s\le 2r,$

b2) $w(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_s^2+1,\ 0\le r<s\le n,$

b3) $w(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_s^2+x_n,\ 0<r\le s<n,\quad s\le 2r.$

Klasyfikacja zbiorów stopnia 2 na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$

Ponieważ każde równanie dwóch zmiennych 2-go stopnia ma jedną ze skończenie wielu postaci kanonicznych, określenie czym jest zbiór rozwiązań sprowadza się do odpowiedniego nazwania zbioru rozwiązań równania w postaci kanonicznej. Dowolne dwa równania o tej samej postaci kanonicznej mają zbiory rozwiązań identyczne z dokładnością to podobieństwa afinicznego. Mamy zatem takie przypadki (symbole x i y oznaczają niewiadome):

a1	$x^2+1=0$	Zbiór pusty.
a1	$x^2+y^2+1=0$	Zbiór tym bardziej pusty.
a2	$x^2=0$	Zbiorem rozwiązań jest prosta x = 0.
a2	$x^2+y^2=0$	Zbiór jednopunktowy, x = y = 0.
b1	$x^2-y^2=0$	Dwie proste, o równaniach x + y = 0 i x - y = 0.
b2	$-x^2+1=0$	Dwie proste równoległe, x = 1 i x = -1.
b2	$x^2-y^2+1=0$	Hiperbola.
b2	$-x^2-y^2+1=0$	Elipsa.
b3	$x^2+y=0$	Parabola.

Klasyfikacja zbiorów stopnia 2 w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$

a1	$x^2 + 1 = 0$	Zbiór pusty.
a1	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Zbiór jak wyżej pusty.
a1	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	Zbiór pusty.
a2	$x^2 = 0$	Płaszczyzna x = 0.
a2	$x^2 + y^2 = 0$	Prosta x = y = 0.
a2	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Zbiór jednopunktowy, x = y = z = 0.
b1	$x^2 - y^2 = 0$	Dwie płaszczyzny, o równaniach x + y = 0 i x - y = 0.
b1	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Stożek.
b2	$-x^2 + 1 = 0$	Dwie płaszczyzny równoległe, x = 1 i x = -1.
b2	$x^2 - y^2 + 1 = 0$	Walec hiperboliczny.
b2	$-x^2 - y^2 + 1 = 0$	Walec eliptyczny.
b2	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	Hiperboloida dwupowłokowa.
b2	$x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$	Hiperboloida jednopowłokowa.
b2	$-x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$	Elipsoida.
b3	$x^2 + y = 0$	Walec paraboliczny.
b3	$x^2 + y^2 + z = 0$	Paraboloida eliptyczna.
b3	$x^2 - y^2 + z = 0$	Paraboloida hiperboliczna.

Powierzchnie drugiego stopnia, tj. elipsoida, stożek, walce, paraboloidy i hiperboloidy są nazywane kwadrykami.

Wykład 24

Definicja 24.1 *Kwadryki nazywamy prostokreślnymi jeżeli są sumami mnogościowymi prostych. Lub równoważnie - Przez każdy punkt kwadryki przechodzi prosta zawarta w niej.*

Twierdzenie 24.2 *Kwadrykami prostokreślnymi są walce, stożek, hiperboloida jednopowłokowa i paraboloida hiperboliczna. Pozostałe kwadryki elipsoida, hiperboloida dwupowłokowa i paraboloida eliptyczna nie zawierają prostych.*

Definicja 24.3 *Niech X będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznej V wymiaru n nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Punkt $p \in V$ nazywamy* **środkiem symetrii** *zbioru X jeżeli dla dowolnego wektora $\alpha \in S(V)$*
$p + \alpha \in X \Rightarrow p - \alpha \in X$.

Stwierdzenie 24.4 *Posiadanie środka symetrii jest własnością afiniczną. Dokładniej, jeżeli p jest środkiem symetrii zbioru X i φ jest izomorfizmem afinicznym to $\varphi(p)$ jest środkiem symetrii zbioru $\varphi(X)$.*

Przykład 24.5 *Okrąg ma nieskończenie wiele osi symetrii ale afinicznie równoważna z nim elipsa o równaniu $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tylko dwie. Zatem posiadanie osi symetrii nie jest własnością afiniczną.*

Definicja 24.6 *Niech A będzie algebrą nad ciałem K. Różniczkowaniem na A nazywamy każde przekształcenie liniowe $\sigma \in L(A;A)$ spełniające warunek $\sigma(ab) = a\sigma(b) + \sigma(a)b$.*

Przykład 24.7 *Niech $A = K[x]$. Pochodna czyli przekształcenie zadane na bazie $\sigma(x^n) = nx^{n-1}$ jest różniczkowaniem. $\sigma(w(x)) = w'(x)$.*

Przykład 24.8 *Niech $A \in K^n_n$. Przekształcenie $\partial_A : K^n_n \to K^n_n$ zadane wzorem $\partial_A(X) = AX - XA$ jest różniczkowaniem.*

Przykład 24.9 *Niech $A = K[x_1, x_2, ..., x_n]$. Pochodna cząstkowa czyli przekształcenie zadane na bazie $\frac{\partial}{\partial x_t}(x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}) = i_t x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_t^{i_t - 1} ... x_n^{i_n}$ jest różniczkowaniem.*

Twierdzenie 24.10 *Niech K będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$ zaś $H = \{p \in K^n \mid w(p) = 0\}$ będzie właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2. Wówczas punkt q jest środkiem symetrii H wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{1 \le t \le n} \ \frac{\partial w}{\partial x_t}(q) = 0$.*

W dowodzie wykorzystujemy lematy:

Lemat 24.11 *Niech a będzie pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in K[x]$. Wówczas $w(-a) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w'(0) = 0$.*

Lemat 24.12 *Niech $w(x) \in K[x_1, x_2, ..., x_n]_2$ i $f_\alpha(x) = w(q + x\alpha) \in K[x]$, dla pewnego wektora $\alpha = (r_1, r_2, ..., r_n) \in K^n$ i punktu $q = [q_1, q_2, ..., q_n]$. Wówczas $f'(0) = \sum_{i=1}^n \ r_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(q)$.*

Dowód:
Niech $w(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c$. Wówczas

$$\frac{\partial w}{\partial x_t}(x_1, x_2, ..., x_n) = 2a_{t,t} x_t + \sum_{i=1}^{t-1} a_{i,t} x_i + \sum_{i=t+1}^{n} a_{t,i} x_i + b_t$$

$f_\alpha(x) = w(q + x\alpha) = w(q_1 + xr_1, q_2 + xr_2, \ldots, q_n + xr_n) =$
$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}(q_i + xr_i)(q_j + xr_j) + \sum_{i=1}^n b_i(q_i + xr_i) + c =$
$= x^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} q_i q_j + x \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}(q_i r_j + q_j r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \right) +$
$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} q_i q_j + \sum_{i=1}^n b_i q_i + c$. Zatem

$f'_\alpha(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}(q_i r_j + q_j r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i =$
$= \sum_{i=1}^n r_i \left(2a_{i,i} q_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i} q_i + \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} q_j + b_i \right) = \sum_{i=1}^n \ r_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(q)$

□

Dowód:
Twierdzenia 24.10

$\Leftarrow$ Niech $\forall_{1\leq t\leq n}\ \frac{\partial w}{\partial x_i}(q) = 0$ oraz dla pewnego wektora $\alpha = (r_1, r_2, ..., r_n)$ punkt $q + \alpha \in H$. Przyjmijmy $f_\alpha(x) = w(q + x\alpha) \in K[x]$.
Wówczas $f(1) = w(q+\alpha) = 0$ i na mocy lematu 24.12 $f'(0) = \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial w}{\partial x_i}(q) = 0$ więc na mocy lematu 24.11 $0 = f(-1) = w(q - \alpha)$. Zatem $q - \alpha \in H$.

$\Rightarrow$ Niech q będzie środkiem symetrii H. H jest właściwa więc istnieje ciąg liniowo niezależnych wektorów $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ takich, że $\forall_{1\leq i\leq n}\ q + \alpha_i \in H$. Wtedy $\forall_{1\leq i\leq n}\ q - \alpha_i \in H$ oraz na mocy lematu 24.11 $\forall_{1\leq i\leq n}\ f'_{\alpha_i}(0) = 0$. Przyjmijmy $\alpha_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n})$. Wtedy na mocy lematu 24.12

$$0 = f'_{\alpha_i}(0) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial w}{\partial x_1}(q).$$

Zatem ciąg $\frac{\partial w}{\partial x_1}(q), \frac{\partial w}{\partial x_2}(q), \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n}(q)$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego o macierzy $M = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$. Macierz ta jest odwracalna więc

$$\forall_{1\leq t\leq n}\ \frac{\partial w}{\partial x_t}(q) = 0.$$

$\square$

Twierdzenie 24.13 *Niech $H = \{p \in R^n \mid w(p) = 0\}$ będzie właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2. Wówczas:*

1) Jeżeli $w(x)$ jest typu b1) to H ma środek symetrii i każdy środek symetrii należy do H.

2) Jeżeli $w(x)$ jest typu b2) to H ma środek symetrii i żaden środek symetrii nie należy do H.

3) Jeżeli $w(x)$ jest typu b3) to H nie ma środka symetrii

Twierdzenie 24.14 *Niech $H = \{p \in R^n \mid w(p) = 0\}$ będzie właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2. Wówczas typ afiniczny H jest jednoznacznie wyznaczony przez wielomian typu b1) , b2) lub b3).*

Wykład 25

Przypomnijmy:

Twierdzenie 25.1 *Niech X będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ wymiaru n nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Wówczas istnieje* *taki izomorfizm afiniczny f, że $f(X) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid w(p) = 0\}$, gdzie wielomian w jest jednego z następujących typów:*

a1) $w(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 + 1,\ 0 < r \leq n,$

a2) $w(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2,\ 0 < r \leq n,$

b1) $w(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_s^2,\ 0 < r < s \leq n,\ \ s \leq 2r,$

b2) $w(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_s^2 + 1,\ 0 \leq r < s \leq n,$

b3) $w(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_s^2 + x_n,\ 0 < r \leq s < n,\ \ s \leq 2r.$

Twierdzenie 25.2 *Hiperpowierzchnie typu a1) są zbiorami pustymi, typu a2) są podprzestrzeniami afinicznymi wymiaru $n - r$ zaś hiperpowierzchnie typu b1), b2) i b3) są właściwe.*

Dowód:
Oznaczmy symbolami $V = S(af(X))$ przestrzeń wektorów stycznych i $\Theta = [0, 0, ..., 0]$ punkt będący początkiem układu współrzędnych.

Ad b1) Dla $1 \leq i \leq r$, $r < j \leq s$ i $s < t \leq n$ punkty $\Theta + e_i + e_j \in X$, $\Theta - e_i + e_j \in X$, $\Theta + e_i - e_j + \in X$ oraz $\Theta + e_i + e_j + e_t \in X$. Zatem wektory $2e_i \in V$, $2e_j \in V$ oraz $2e_t \in V$ jako ich różnice. Stąd $\mathbb{R}^n = V = S(af(X))$.

Ad b2) Dla $1 \leq i \leq r$, $r < j \leq s$ i $s < t \leq n$ punkty $\Theta + 2e_i + \sqrt{3}e_j \in X$, $\Theta - 2e_i + \sqrt{3}e_j \in X$, $\Theta + 2e_i - \sqrt{3}e_j + \in X$ oraz $\Theta + 2e_i + \sqrt{3}e_j + e_t \in X$. Zatem wektory $4e_i \in V$, $2\sqrt{3}e_j \in V$ oraz $2e_t \in V$ jako ich różnice. Stąd $\mathbb{R}^n = V = S(af(X))$.

Ad b3) Dla $1 \leq i \leq r$, $r < j \leq s$ i $s < t < n$ punkty $\Theta + e_i + e_j \in X$, $\Theta - e_i + e_j \in X$, $\Theta + e_i - e_j \in X$ oraz $\Theta + e_i + e_j + e_t \in X$. Zatem wektory $2e_i \in V$, $2e_j \in V$ oraz $2e_t \in V$ jako ich różnice. Dodatkowo $\Theta + e_1 - e_n \in X$ oraz $\Theta + 2e_i - 4e_n \in X$ więc $e_1 - 3e_n \in V$. Stąd $\mathbb{R}^n = V = S(af(X))$.

□

Twierdzenie 25.3 *Hiperpowierzchnie różnego typu nie są afinicznie równoważne.*

Zajmiemy się teraz wykazaniem jednoznaczności przedstawienia hiperpowierzchni w klasach typu b1), b2) i b3).

Lemat 25.4 *Niech $w(x), v(x) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]_2$ będą wielomianami stopnia 2 takimi, że $w(x) = w_2(x) + w_1(x) + c$ i $v(x) = v_2(x) + v_1(x) + d$, gdzie $w_2(x), v_2(x) \in F\mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]_2$ zaś $w_1(x), v_1(x) \in F\mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]_1$.*
Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izomorfizmem afinicznym takim, że $(w \circ \varphi)(x_1, x_2, ..., x_n) = v(x_1, x_2, ..., x_n)$. Wówczas $(w_2 \circ \varphi')(x_1, x_2, ..., x_n) = v_2(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Dowód:
Niech $\left[\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & c \end{array}\right]$ będzie macierzą wielomianu $w(x)$, gdzie A jest macierzą formy kwadratowej $w_2(x)$. Niech $\left[\begin{array}{c|c} B & \beta^T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ będzie macierzą izomorfizmu $\varphi(x)$, gdzie B jest macierzą φ'. Wówczas macierzą $v(x)$ jest
$$\left[\begin{array}{c|c} B^T & 0 \\ \hline \beta & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & c \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B & \beta^T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B^T AB & B^T\left(A\beta^T + \alpha^T\right) \\ \hline (\beta A + \alpha)B & \beta A\beta^T + \alpha\beta^T + \beta\alpha^T + c \end{array}\right]$$
zaś macierzą $v_2(x)$ jest $B^T AB$.

□

Twierdzenie 25.5 *Hiperpowierzchnie różnego typu b1), b2) i b3) jednoznacznie wyznaczają parametry r i s występujące w twierdzeniu 26.1.*

Twierdzenie 25.6 *Niech H będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 w przestrzeni afinicznej V, skończonego wymiaru n nad ciałem K, z układem bazowym $\mathcal{A}$.*
a) Jeżeli H jest właściwa i $H = \{q \in V \mid w_{\mathcal{A}}(q) = 0\} = \{q \in V \mid v_{\mathcal{A}}(q) = 0\}$ dla pewnych wielomianów $w, v \in K[x_1, x_2, ..., x_n]_2$ to istnieje $c \in K$, dla którego $w = c \cdot v$.
b) Jeżeli H nie jest właściwa to H jest właściwą podprzestrzenią afiniczną.

bez dowodu.

Rysunki hiperpowierzchni stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ znajdują się na końcu wykładów.

Wykład 26

Izometryczne hiperpowierzchnie

Lemat 26.1 *Niech $v(x) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]_2$ będzie wielomianem stopnia 2. Wówczas istnieje taka izometria f, że $v \circ f = w$, gdzie wielomian w jest jednego z następujących typów:*

a) $w(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 + d, \quad d \neq 0$

b) $w(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$

c) $w(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + bx_n.$

Ponadto ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do permutacji, element b z dokładnością do znaku $\pm$ zaś element d jednoznacznie.

Dowód:
Krok 1.

Niech $M = \left[\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & c \end{array}\right]$ będzie macierzą symetryczną opisującą wielomian $v(x) = v_2(x) + v_1(x) + d$. Wówczas forma kwadratowa $v_2(x)$ jest opisana macierzą symetryczną A. Na mocy twierdzenia o diagonalizacji rzeczywistych macierzy symetrycznych (twierdzenie 18.11) istnieje taka macierz ortogonalna B, że $B^{-1}AB = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest macierzą diagonalną. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że w ciągu $diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tylko r pierwszych elementów jest niezerowych. Niech teraz f_1 będzie izometrią nie ruszającą punktu Θ i której część liniowa jest wyznaczona macierzą B. Wtedy wielomian $v \circ f_1$ jest wyznaczony macierzą

$$\left[\begin{array}{c|c} B^T & 0 \\ \hline \theta & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & c \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B & \theta^T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B^TAB & B^T\alpha^T \\ \hline \alpha B & c \end{array}\right]$$

A więc $v \circ f_1$ jest postaci

$$\sum_{i=1}^r a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = \sum_{i=1}^r a_i \left(x_i + \frac{b_i}{2a_i}\right)^2 + \sum_{i=r+1}^n b_i x_i + c - \sum_{i=1}^r \frac{b_i^2}{4a_i}$$

Krok 2

Niech f_2 będzie przesunięciem o wektor $\left(-\frac{b_1}{2a_1}, -\frac{b_2}{2a_2}, ..., -\frac{b_r}{2a_r}, 0, 0, ..., 0\right)$. Jeżeli $\sum_{i=r+1}^n b_i x_i = \theta$ to $v \circ f_1 \circ f_2$ jest postaci $\sum_{i=1}^r a_i x_i^2 + d$, gdzie $d = c - \sum_{i=1}^r \frac{b_i^2}{4a_i}$ a więc jest postaci a) lub b).

Krok 3

Teraz przyjmujemy, że dla pewnego $i > r$ $b_i \neq 0$.

Niech $e_1, e_2, ..., e_r, \alpha_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=r+1}^n b_i^2}} \sum_{i=r+1}^n b_i e_i$ będzie ciągiem wektorów. Jest to ciąg wektorów parami ortogonalnych wektorów i każdy z nich ma długość 1. Zatem możemy ten ciąg uzupełnić do bazy ortonormalnej $\alpha_1 = e_1, ..., \alpha_{r+1}, ..., \alpha_n$. Niech f_3 będzie złożeniem przekształcenia euklidesowego f_3', zadanego na bazie wzorem:

$$f_3'(e_i) = \begin{cases} e_i & , \ 1 \le i \le r \\ \alpha_{i+1} & , \ r < i < n \\ \alpha_{r+1} & , \ i = n \end{cases}$$

i przesunięcia o wektor $\left(-\frac{b_1}{2a_1}, -\frac{b_2}{2a_2}, ..., -\frac{b_r}{2a_r}, 0, ..., 0, -c\right)$. Wtedy $v \circ f_1 \circ f_3$ jest postaci $\sum_{i=1}^r a_i x_i^2 + x_n$ a więc jest postaci c).

Krok 4. Jednoznaczność

Ponieważ wielomiany różnych typów opisują hiperpowierzchnie o różnych typach afinicznych więc żaden nie może być złożeniem wielomianu innego typu i izometrii.

Ad a) i b). Niech $w(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 + d$ i $v(x) = w \circ f(x) = a_1'x_1^2 + a_2'x_2^2 + \ldots + a_n'x_n^2 + d'$. W języku macierzy wygląda to następująco:

$$\left[\begin{array}{c|c} B^T & 0 \\ \hline \beta & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & \theta^T \\ \hline \theta & d \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B & \beta^T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} B^TAB & B^TA\beta^T \\ \hline \beta AB & \beta A\beta^T+d \end{array}\right],$$

gdzie $A = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $B^TAB = diag(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ są macierzami diagonalnymi zaś $\beta AB = \theta$. Ponieważ B jako macierz ortogonalna jest odwracalna więc również $\beta A = \theta$ i $\beta A\beta^T + d = d$. Daje to jednoznaczność d. Macierze A i $B^TAB = B^{-1}AB$ są podobne więc mają te same wartości własne. Zatem ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ mogą różnić się co najwyżej kolejnością.

Ad c) Niech $w(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + bx_n$
i $v(x) = w \circ f(x) = a'_1x_1^2 + a'_2x_2^2 + \ldots + a'_{n-1}x_{n-1}^2 + b'x_n$.

Ponieważ przy pomocy izometrii możemy dowolnie permutować zmienne więc bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że: $w(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_rx_r^2 + bx_n$ i $v(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_rx_r^2 + b'x_n$, ponadto liczby $a_1, a_2, \ldots, a_r$ są niezerowe.

Podzielmy macierze formy kwadratowej A i pochodnej izometrii B na bloki.
$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, gdzie $A_{11} \in \mathbb{R}_r^r$ jest macierzą odwracalną
oraz $B = \begin{bmatrix} B_{11}^T & B_{21}^T \\ B_{12}^T & B_{22}^T \end{bmatrix}$.

Ponieważ $A = B^TAB = B^{-1}AB$ więc $AB = BA$. Co daje:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}A_{11} & 0 \\ B_{21}A_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $A_{11}B_{12} = 0$ i $B_{21}A_{11} = 0$ ale A_{11} jest odwracalna więc $B_{12} = 0$ i $B_{21} = 0$

Teraz macierz wielomianu $v(x) = w \circ f(x)$ wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} B_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^T & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^T \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \alpha^T \\ 0 & B_{22} & \beta^T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} B_{11}^TA_{11}B_{11} & 0 & B_{11}^TA_{11}\alpha^T \\ 0 & 0 & B_{22}^Te^T \\ \alpha A_{11}B_{11} & eB_{22} & \alpha A_{11}\alpha^T + e\beta^T + \beta e^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^T \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}, \text{ gdzie:}$$

$e = (0, ..., 0, \frac{b}{2}) \in \mathbb{R}^{n-r}$ i $eB_{22} = f = (0, ..., 0, \frac{b'}{2}) \in \mathbb{R}^{n-r}$. Wynika stąd, że ostatni wiersz macierzy B_{22} też jest postaci $(0, ..., 0, t) \in \mathbb{R}^{n-r}$.

B jest macierzą ortogonalną więc:

$$I = BB^T = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{B_{22}} & \gamma^T \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \overline{B_{22}}^T & 0 \\ 0 & \gamma & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}B_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \overline{B_{22}B_{22}}^T + \gamma^T\gamma & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}.$$

Zatem $t = \pm 1$ i $f = eB_{22} = te = \pm e$.

Zatem element b jest wyznaczony z dokładnością do znaku $\pm$.

□

Twierdzenie 26.2 *Niech H będzie hiperpowierzchnie stopnia 2 w przestrzeni euklidesowej afinicznej $E(R^n)$. Wówczas istnieje taka izometria f, że $f(H) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid w(p) = 0\}$, gdzie wielomian w jest jednego z następujących typów:*

$$a) \quad w(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 + 1$$

$$b) \quad w(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$$

$$c) \quad w(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + x_n.$$

Ponadto:

w przypadku hiperpowierzchni właściwych typu a) ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do permutacji.

w przypadku hiperpowierzchni właściwych typu b) ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do permutacji i mnożenia przez niezerowy skalar.

w przypadku hiperpowierzchni właściwych typu c) ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do permutacji i mnożenia przez ± 1.

Dowód:
Niech $H = \{p \in \mathbb{R}^n \mid v(p) = 0\}$. Wówczas $f(H) = \{f(p) \in \mathbb{R}^n \mid w(p) = 0\} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid v(f^{-1}(p)) = 0\}$. Jako f^{-1} bierzemy izometrię z lematu 27.1 i w razie potrzeby dzielimy wielomian $v(f^{-1}(x))$ przez b lub d odpowiednio.

□

Podprzestrzenie symetrii.

Definicja 26.3 *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni afinicznej euklidesowej V. Powiemy, że W jest podprzestrzenią symetrii niepustego zbioru $H \subset V$ gdy $S_W(H) = H$, gdzie S_W jest symetrią prostopadłą względem W.*

Stwierdzenie 26.4 *Niech $f : V \to V$ będzie izomorfizmem afinicznym przestrzeni afinicznej V. Jeżeli $S : V \to V$ jest symetrią względem podprzestrzeni W wzdłuż W_1 to $f \circ S \circ f^{-1}$ jest symetrią względem podprzestrzeni $f(W)$ wzdłuż $f(W_1)$.*

Twierdzenie 26.5 *Niech $f : V \to V$ będzie izometrią przestrzeni afinicznej euklidesowej V. Jeżeli $S : V \to V$ jest symetrią prostopadłą względem podprzestrzeni W to $f \circ S \circ f^{-1}$ jest symetrią prostopadłą względem podprzestrzeni $f(W)$.*

Wniosek 26.6 *Jeżeli W jest podprzestrzenią symetrii niepustego zbioru $H \subset V$ i f jest izometrią to $f(W)$ jest podprzestrzenią symetrii zbioru $f(H)$.*

Wykład 27

Przestrzenie unitarne

Definicja 27.1 *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.* **Przestrzenią unitarną** *nazywamy algebrę $\{V; <>\}$, gdzie funkcjonał $<>$: $V \times V \to \mathbb{C}$, zwany* **hermitowskim** *spełnia warunki:*
1) $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ \langle\alpha\,;\beta\rangle = \overline{\langle\beta\,;\alpha\rangle}$
2) $\forall_{\alpha_1,\alpha_2,\beta\in V}\forall_{z_1,z_2\in\mathbb{C}}\ \langle z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2\,;\beta\rangle = z_1\langle\alpha_1\,;\beta\rangle + z_2\langle\alpha_2\,;\beta\rangle$
3) $\alpha \neq \theta \Rightarrow \langle\alpha\,;\alpha\rangle > 0.$

Przykład 27.2 *Przestrzenią unitarną jest $V = \mathbb{C}^n$ wraz z funkcjonałem określonym wzorem: $\langle\alpha\,;\beta\rangle = \alpha\cdot\overline{\beta}^T$.*
$\langle(a_1, a_2, ..., a_n)\,;(b_1, b_2, ..., b_n)\beta\rangle = \sum_{i=1}^n\ a_i\overline{b_i}.$

Definicja 27.3 *Wektory α, β nazywamy prostopadłymi gdy $\langle\alpha\,;\beta\rangle = 0$ i oznaczamy $\alpha\perp\beta$.*

Stwierdzenie 27.4 *$\alpha\perp\beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta\perp\alpha$.*

Definicja 27.5 *Długość (normę) wektora $\alpha \in V$ definiujemy jako liczbę* $\|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$.

Twierdzenie 27.6 *Każda przestrzeń unitarna ma bazę ortonormalną.*

Algorytm ortogonalizacji Grama - Schmidta.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni unitarnej $\{V\langle\,;\rangle\}$. Indukcyjnie budujemy bazę ortogonalną:
1^0 $\gamma_1 = \alpha_1$.
2^0 $\gamma_j = \alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1}\frac{\langle\alpha_j\,;\gamma_i\rangle}{\langle\gamma_i\,;\gamma_i\rangle}\gamma_i.$

Definicja 27.7 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ będzie ciągiem wektorów z V.* **Macierzą Grama** *układu $\mathcal{A}$ nazywamy macierz*

$$G(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = G(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle \\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle) & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Uwaga: $G(\mathcal{A})^T = \overline{G(\mathcal{A})}$.

Wyznacznikiem Grama *układu $\mathcal{A}$ nazywamy wyznacznik macierzy Grama $W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = det\ G(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = det\ G(\mathcal{A}) = W(\mathcal{A})$.*

Twierdzenie 27.8 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t)$ będzie liniowo niezależnym ciągiem wektorów przestrzeni unitarnej V. Niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni $W = lin\mathcal{A}$. Niech $\alpha_i = a_{i,1}\beta_1 + a_{i,2}\beta_2 + ... + a_{i,t}\beta_t$. Wówczas, $W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t) = |det[a_{i,j}]|^2 > 0$.*

Twierdzenie 27.9 *Jeżeli układ $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ jest liniowo zależny to wyznacznik Grama jest zerowy - $W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0$.*

Twierdzenie 27.10 *Własności normy:*
1) $\|\alpha\| \geq 0$
2) $\|\alpha\| = 0 \Rightarrow v = \theta$
3) $\|t\alpha\| = |t| \cdot \|\alpha\|$
4) $|\langle\alpha, \beta\rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ *(nierówność Cauchy'ego-Schwarza)*
5) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\||$ *(nierówność Minkowskiego)*
6) $\|\alpha\| - \|\beta\| \leq \|\alpha - \beta\|$

Ad 4) Niech zbiór $\{\alpha, \beta\}$ będzie liniowo niezależny i niech $z = \langle\alpha, \beta\rangle$. Teraz $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ 0 < \langle\alpha + xz\beta, \alpha + xz\beta\rangle = x^2|z|^2\langle\beta, \beta\rangle + x(\overline{z}\langle\alpha, \beta\rangle + z\langle\beta, \alpha\rangle) + \langle\alpha, \alpha\rangle = x^2|z|^2\langle\beta, \beta\rangle + 2x|z|^2 + \langle\alpha, \alpha\rangle$

Zatem $0 > \Delta = 4|z|^4 - 4|z|^2\langle\beta, \beta\rangle\langle\alpha, \alpha\rangle$ stąd $|\langle\alpha, \beta\rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

Podstawiając $x = \frac{-1}{|z|}$ dostajemy $2|\langle\alpha, \beta\rangle| \leq \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$

Definicja 27.11 *Niech $\{V_1; <>_1\}$ i $\{V_2; <>_2\}$ będą przestrzeniami unitarnymi. Przekształcenie $f : V_1 \to V_2$ nazywamy* **unitarnym** *jeżeli zachowuje iloczyn hermitowski. To znaczy $\forall_{\alpha,\beta\in V_1}\ \langle\alpha\,; \beta\rangle_1 = \langle(f(\alpha)\,; f(\beta)\rangle_2$.*

Twierdzenie 27.12 *Przekształcenie unitarne jest różnowartościowe.*

Definicja 27.13 *Powiemy, że macierz $M \in \mathbb{C}_n^n$ jest* **unitarna** *jeżeli $M \cdot \overline{M}^T = I$. Lub równoważnie: $\overline{M} \cdot M^T = I$ czy $M^T \cdot \overline{M} = I$.*

Twierdzenie 27.14 *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t)$ będzie ortonormalną bazą przestrzeni unitarnej V zaś $f \in L(V; V)$. Wówczas f jest unitarne wtedy i tylko wtedy, gdy $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest unitarna.*

Twierdzenie 27.15 *Niech v będzie przestrzenią unitarną i $f \in L(V; V$. Wówczas f jest przekształceniem unitarnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza ortonormalna przestrzeni V złożona z wektorów własnych przekształcenia f których wszystkie wartości własne mają moduł 1.*

Twierdzenie 27.16 *Niech $M \in \mathbb{C}_n^n$ będzie macierzą kwadratową. Wówczas M jest macierzą unitarną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz unitarna C taka, że $C^{-1}MC$ jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej liczby o module 1.*

Definicja 27.17 *Niech $f \in L(V; V)$ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $\{V; <; >\}$.*

1) **Przekształceniem sprzężonym** *do f nazywamy endomorfizm $f^* \in L(V; V)$ taki, że $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ \langle f(\alpha)\,; \beta\rangle = \langle\alpha\,; f^*(\beta)\rangle$.*

2) Endomorfizm f nazywamy **hermitowskim** *gdy $f = f^*$.*

Twierdzenie 27.18 *Niech $M = M(f)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ będzie macierzą endomorfizmu $f \in L(V;V)$ w bazie ortonormalnej $\mathcal{A}$. Niech $g \in L(V;V)$. Wówczas:*

1) g jest przekształceniem sprzężonym do f wtedy i tylko wtedy, gdy $M(g)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \overline{M}^T$.

2) f jest hermitowski wtedy i tylko wtedy, gdy $M = \overline{M}^T$.

Twierdzenie 27.19 *Niech $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie przekształceniem hermitowskim. Wówczas istnieje baza ortonormalna przestrzeni $\mathbb{C}^n$ złożona z wektorów własnych przekształcenia f. Ponadto każda wartość własna f jest liczbą rzeczywistą.*

Twierdzenie 27.20 *Niech $f \in L(V;V)$ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $\{V; <;>\}$. Wówczas istnieją takie przekształcenia hermitowskie h_1 i h_2, że $f = h_1 + ih_2$.*

Zajmiemy się teraz opisem warunków koniecznych i dostatecznych by macierz była diagonalizowalna.

Twierdzenie 27.21 *Macierz $M \in K^n_n$ jest diagonalizowalna nad ciałem K wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian minimalny f rozkłada się nad ciałem K na czynniki liniowe i nie ma pierwiastków wielokrotnych.*

Twierdzenie 27.22 *Niech f będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni V nad ciałem K. Wówczas istnieje baza ortonormalna przestrzeni V złożona z wektorów własnych przekształcenia f wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian minimalny f rozkłada się nad ciałem K na czynniki liniowe i nie ma pierwiastków wielokrotnych.*

Dla ciała liczb zespolonych warunki diagonalizowalności macierzy można znacznie uprościć.

Twierdzenie 27.23 *Niech $f \in L_K(V;V)$ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni V nad ciałem K. Niech $(k_1, k_2, ..., k_t)$ będzie ciągiem wszystkich wartości własnych f zaś $V_i = \{\alpha \in V \; ; \; f(\alpha) = k_i\alpha\}$ ciągiem podprzestrzeni V. Wówczas istnieje baza V złożona z wektorów własnych f wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej $W \subset V$ zachodzi $W = \bigoplus_{i=1}^{t} (V_i \cap W)$.*

Twierdzenie 27.24 *Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią nad ciałem K zaś $f, g \in L(V;V)$ takimi endomorfizmami dla których istnieją bazy złożone z wektorów własnych. Wówczas $f \circ g = g \circ f$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza, której elementami są wektory własne zarówno względem f jak i g.*

Twierdzenie 27.25 *Niech $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie przekształceniem hermitowskim. Wówczas istnieje baza ortonormalna przestrzeni $\mathbb{C}^n$ złożona z wektorów własnych przekształcenia h. Ponadto każda wartość własna h jest liczbą rzeczywistą.*

Lemat 27.26 *Niech $f = h_1 + ih_2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie kombinacją liniową przekształceń hermitowskich. Jeżeli $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$ to istnieje baza ortonormalna przestrzeni $\mathbb{C}^n$ złożona z wektorów własnych przekształcenia f.*

Twierdzenie 27.27 *Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $\{V; <;>\}$. Wówczas istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych f wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ f^* = f^* \circ f$.*

Twierdzenie 27.28 *Niech $M \in \mathbb{C}^n_n$. Wówczas równoważne są warunki:*
1) $M\overline{M}^T = \overline{M}^T M$.
2) Istnieje macierz unitarna C taka, że $C^{-1}MC$ jest macierzą diagonalną.

Łącząc powyższe twierdzenie z twierdzeniem o rzeczywistych macierzach symetrycznych (twierdzenie 18.11) otrzymujemy:

Twierdzenie 27.29 *Niech $M \in \mathbb{R}^n_n$ będzie macierzą nad ciałem liczb rzeczywistych. Wówczas równoważne są warunki:*
1) Istnieje taka macierz ortogonalna $C \in \mathbb{R}^n_n$, że $C^{-1}MC = D$ jest macierzą diagonalną.
2) $MM^T = M^TM$ i wielomian charakterystyczny M rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na czynniki liniowe.
3) $M = M^T$.

Dowód:

1) $\Rightarrow$ 2)
Ponieważ C jest ortogonalna to $C^{-1} = C^T$ Teraz
$C^TMM^TC = C^TMCC^TM^TC = (C^TMC)(C^TMC)^T = DD^T = D^TD = (C^TMC)^T(C^TMC) = C^TM^TCC^TMC = C^TM^TMC$ więc $MM^T = M^TM$. Ponadto M jest diagonalizowalna więc wielomian charakterystyczny M rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na czynniki liniowe.
2) $\Rightarrow$ 3)
Na mocy twierdzenia 29.8 istnieje macierz unitarna $U \in \mathbb{C}^n_n$ taka, że $U^{-1}MU = D$ jest macierzą diagonalną. Ponadto, ponieważ wielomian charakterystyczny M rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na czynniki liniowe więc $D \in \mathbb{R}^n_n$. Sprzęgamy tę równość i transponujemy: $\overline{U^{-1}MU}^T = \overline{D}^T$ co daje $U^{-1}M^TU = D$. Zatem $M = M^T$.
3) $\Rightarrow$ 1) Wynika z twierdzenia 20.10.

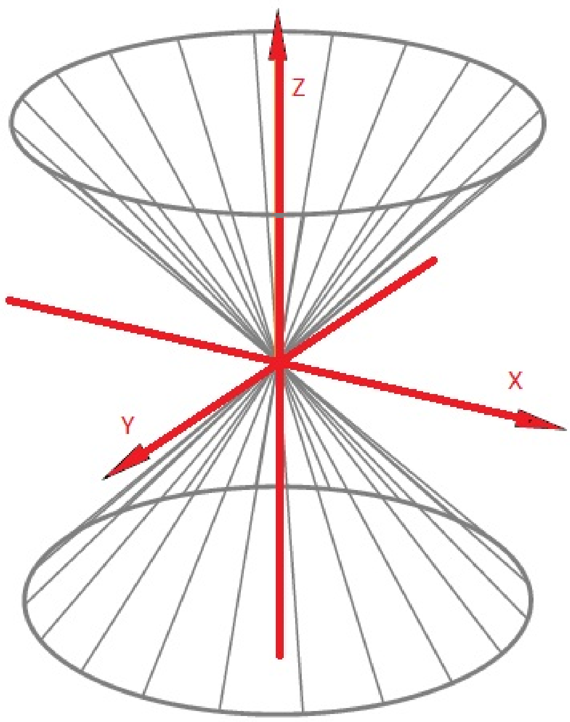
$\square$

Przykład 27.30 *Niech* $M = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. *Wówczas* $MM^T = M^TM$ *i* $M\overline{M}^T = \overline{M}^T M$ *ale gdy* $0 < \cos\varphi < 1$ *to* M *nie jest diagonalizowalna nad* $\mathbb{R}$ *oraz* $M \neq M^T = \overline{M}^T$.

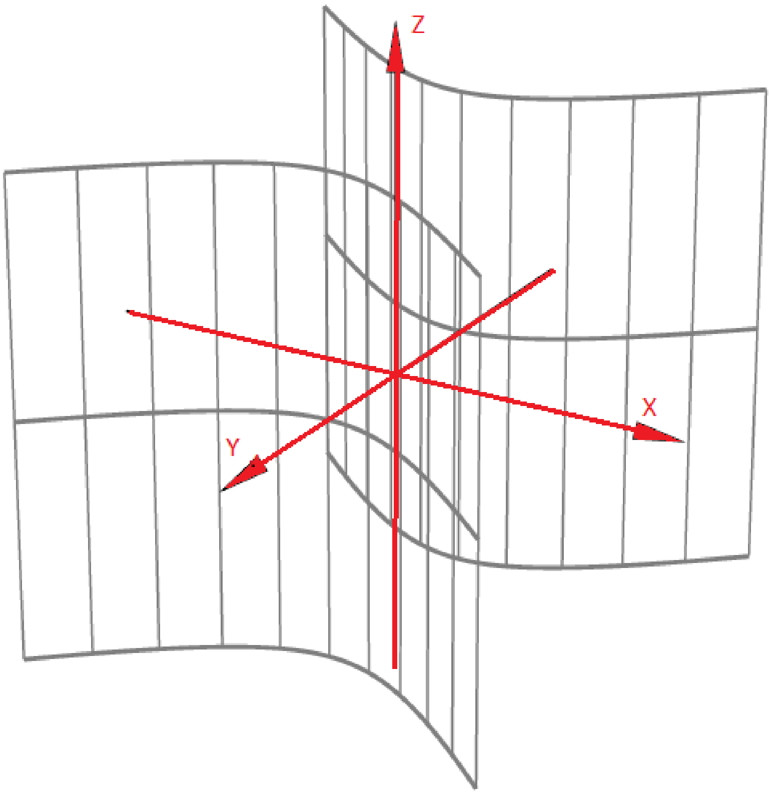
Przykład 27.31 *Niech* $0 < c \leq b$ *będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas macierz* $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *jest diagonalizowalna nad* $\mathbb{R}$
ale $MM^T = M^TM \Leftrightarrow M = M^T$.

Przykład 27.32 *Symetryczne macierze o współczynnikach zespolonych nie muszą być diagonalizowalne. Na przykład macierze* $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ *oraz* $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ *są symetryczne, niezerowe i ich wielomianem charakterystycznym jest* $w(x) = x^2$ *zatem są podobne do* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

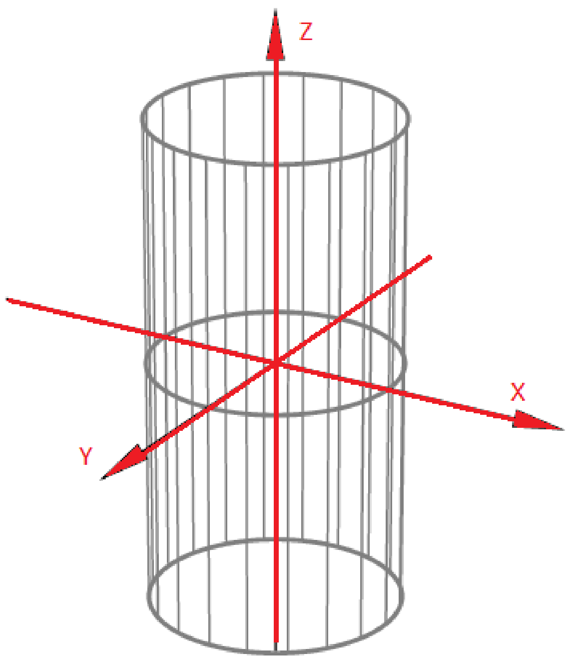
Rysunki



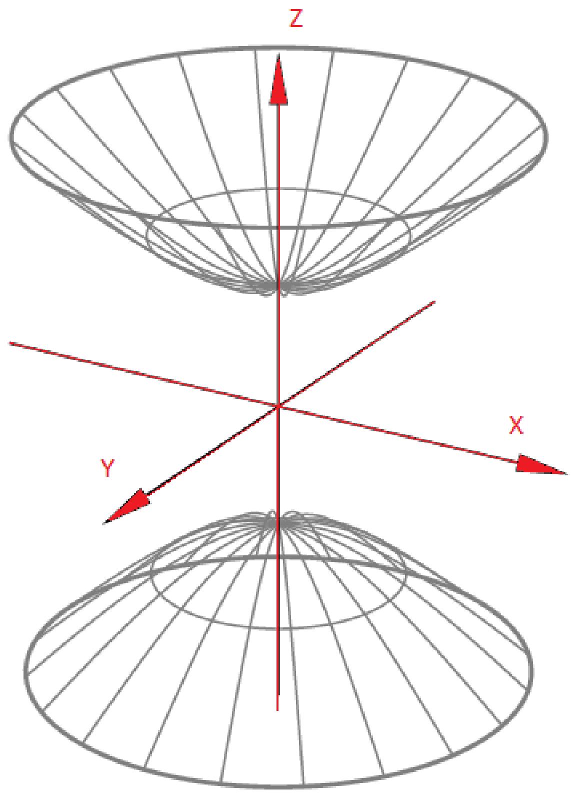
Rysunek 1: Stożek $x^2 + y^2 - z^2 = 0$



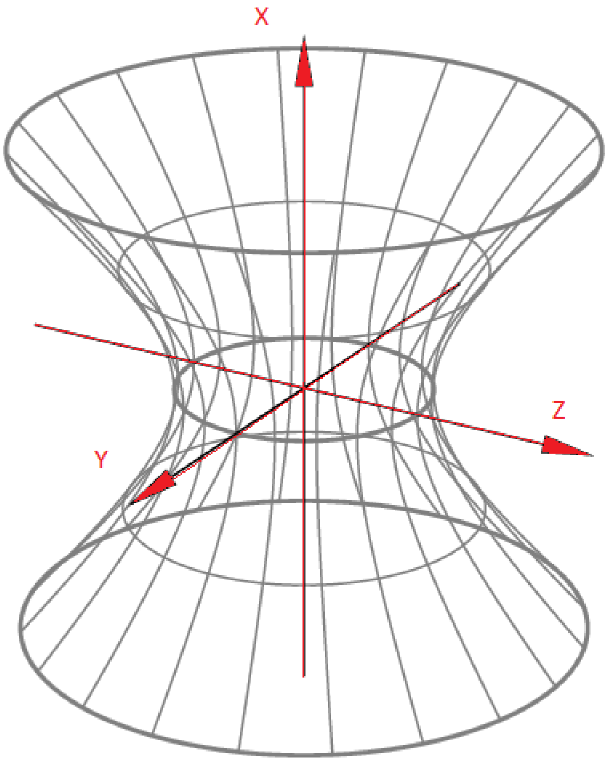
Rysunek 2: $x^2 - y^2 + 1 = 0$: Walec hiperboliczny



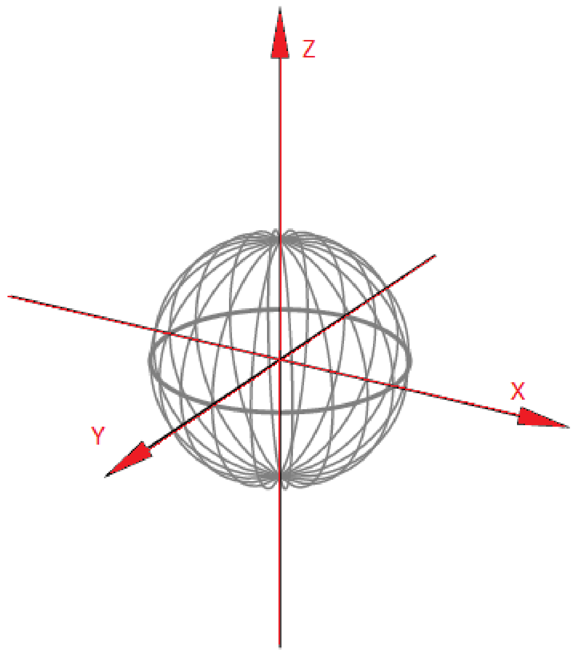
Rysunek 3: $x^2 + y^2 - 1 = 0$: Walec eliptyczny



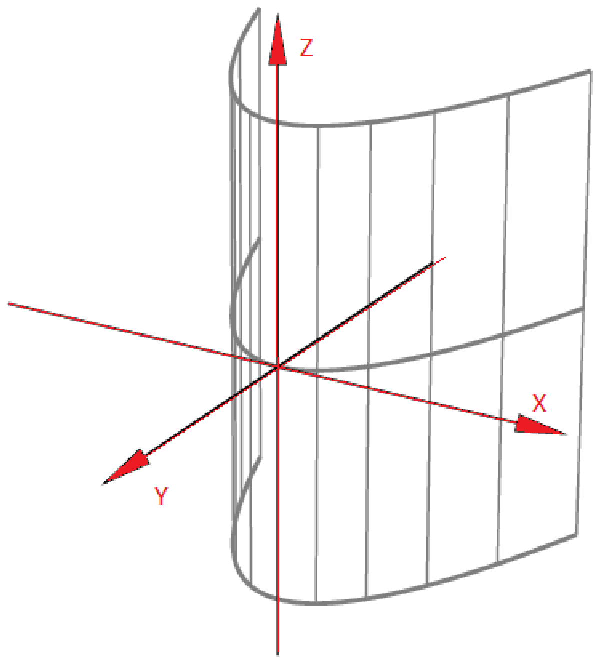
Rysunek 4: $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$: Hiperboloida dwupowłokowa



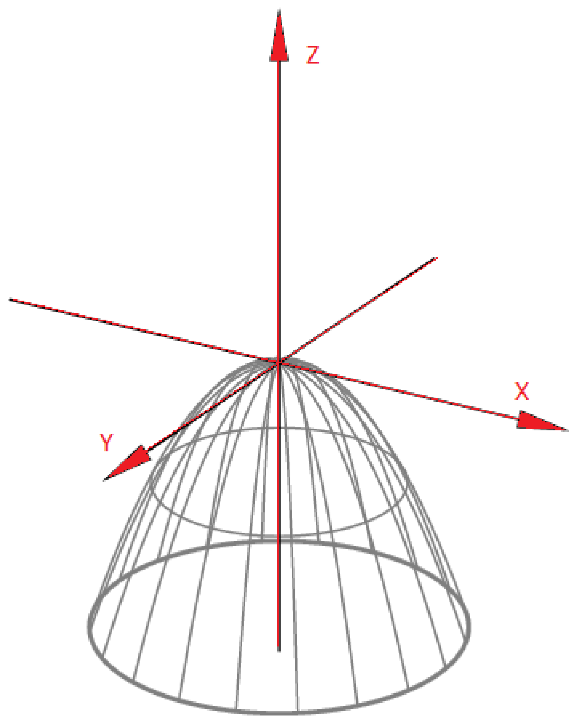
Rysunek 5: $x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$: Hiperboloida jednopowłokowa



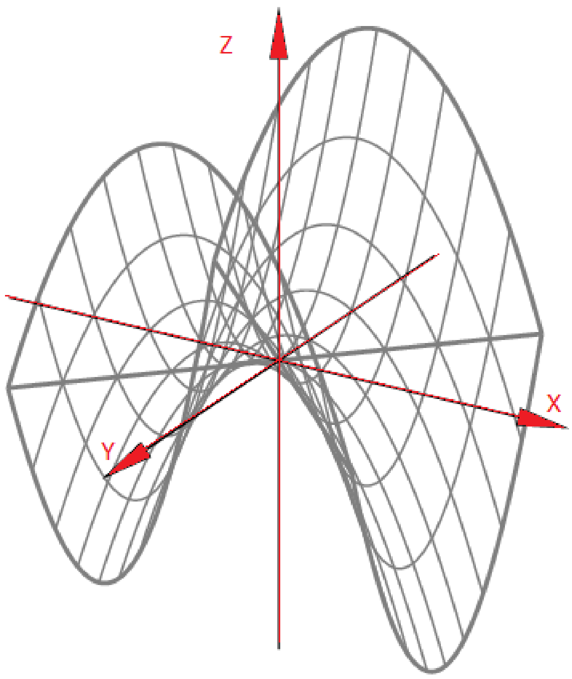
Rysunek 6: $-x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$: Elipsoida



Rysunek 7: $x^2 + y = 0$: Walec paraboliczny



Rysunek 8: $x^2 + y^2 + z = 0$: Paraboloida eliptyczna



Rysunek 9: $x^2 - y^2 + z = 0$: Paraboloida hiperboliczna