Przykłady z teorii systemów uczących się i wymiaru Vapnika-Chervonenkisa

Hung Son Nguyen

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
`email: son@mimuw.edu.pl`

2009

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

- $\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

- $\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;
- $\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

- $\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;
- $\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów
- **Gracz 1 (nauczyciel):** Wybrał jeden z jednomianów, np. $c = \bar{x}_2$.

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

- $\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;
- $\mathbb{M}_3$ = zbiór jednomianów
- **Gracz 1 (nauczyciel):** Wybrał jeden z jednomianów, np. $c = \bar{x}_2$.
- **Gracz 2 (uczeń):** Dostaje próbkę przykładów, np.

D	dec
011	0
100	1
101	1

i musi podać funkcję h podobną do c.

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Algorytm $\mathcal{L}$
Dane

D	dec
011	0
100	1
101	1

Algorytm $\mathcal{L}$

Dane

D	dec
011	0
100	1
101	1

- $h_0 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

Algorytm $\mathcal{L}$
Dane

D	dec
011	0
100	1
101	1

- $h_0 = x_1 x_2 x_3 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
- $h_1 = x_1 x_2 x_3 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$

Algorytm $\mathcal{L}$
Dane

D	dec
011	0
100	1
101	1

- $h_0 = x_1 x_2 x_3 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
- $h_1 = x_1 x_2 x_3 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
- $h_2 = x_1 x_2 x_3 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$

Algorytm $\mathcal{L}$
Dane

D	dec
011	0
100	1
101	1

- $h_0 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_1 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_2 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_3 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
  $h = \mathcal{L}(D) = x_1 \bar{x}_2$

Algorytm $\mathcal{L}$

Dane

D	dec
011	0
100	1
101	1

- $h_0 = x_1x_2x_3\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
- $h_1 = x_1x_2x_3\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
- $h_2 = x_1x_2x_3\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
- $h_3 = x_1x_2x_3\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
  $h = \mathcal{L}(D) = x_1\bar{x}_2$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Algorytm $\mathcal{L}$

Dane

D	dec
011	0
100	1
101	1

- $h_0 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_1 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_2 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_3 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

  $h = \mathcal{L}(D) = x_1 \bar{x}_2$

- Jak dobry jest algorytm $\mathcal{L}$?

Algorytm $\mathcal{L}$

Dane

D	dec
011	0
100	1
101	1

- $h_0 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_1 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_2 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_3 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

  $h = \mathcal{L}(D) = x_1 \bar{x}_2$

- Jak dobry jest algorytm $\mathcal{L}$?
- Sprawdźmy:

	$c = \bar{x}_2$	$h = x_1 \bar{x}_2$	$h = c$
000	1	0	$-$
001	1	0	$-$
010	0	0	$+$
011	0	0	$+$
100	1	1	$+$
101	1	1	$+$
110	0	0	$+$
111	0	0	$+$

Algorytm $\mathcal{L}$
Dane

D	dec
011	0
100	1
101	1

- $h_0 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_1 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_2 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
- $h_3 = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
  $h = \mathcal{L}(D) = x_1 \bar{x}_2$

- Jak dobry jest algorytm $\mathcal{L}$?
- Sprawdźmy:

	$c = \bar{x}_2$	$h = x_1 \bar{x}_2$	$h = c$
000	1	0	$-$
001	1	0	$-$
010	0	0	$+$
011	0	0	$+$
100	1	1	$+$
101	1	1	$+$
110	0	0	$+$
111	0	0	$+$

- $er_c(\mathcal{L}(D)) = er_c(h) = 0,25 = 25\%$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

- Dla próbki

$$D_1 = \{(010, 0), (011, 0), (110, 0)\}$$

mamy $\mathcal{L}(D_1) = 0$, czyli
$er_c(\mathcal{L}(D)) = 0,5 = 50\%$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

- Dla próbki

  $$D_1 = \{(010,0),(011,0),(110,0)\}$$

  mamy $\mathcal{L}(D_1) = 0$, czyli
  $er_c(\mathcal{L}(D)) = 0,5 = 50\%$

- Dla próbki

  $$D_2 = \{(000,1),(011,0),(010,0)\}$$

  mamy $\mathcal{L}(D_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, czyli
  $er_c(\mathcal{L}(D_2)) = 0,375 = 37,5\%$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

- Dla próbki

  $$D_1 = \{(010, 0), (011, 0), (110, 0)\}$$

  mamy $\mathcal{L}(D_1) = 0$, czyli
  $er_c(\mathcal{L}(D)) = 0,5 = 50\%$
- Dla próbki

  $$D_2 = \{(000, 1), (011, 0), (010, 0)\}$$

  mamy $\mathcal{L}(D_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, czyli
  $er_c(\mathcal{L}(D_2)) = 0,375 = 37,5\%$
- Dla próbki

  $$D_3 = \{(001, 1), (111, 0), (100, 1)\}$$

  mamy $\mathcal{L}(D_3) = \bar{x}_2$, czyli
  $er_c(\mathcal{L}(D_3)) = 0$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla różnych próbek,
różne są błędy dla $\mathcal{L}$:

Próbka	$er_c(\mathcal{L}(.))$
D_3	0
...	...
D	0.25
...	...
D_2	0.375
...	...
D_1	0.5
...	...

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla różnych próbek,
różne są błędy dla $\mathcal{L}$:

Próbka	$er_c(\mathcal{L}(.))$
D_3	0
...	...
D	0.25
...	...
D_2	0.375
...	...
D_1	0.5
...	...

Liczba takich próbek

$$|\mathcal{S}(3)| = \binom{8}{3} = 56$$

w tym:

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla różnych próbek, różne są błędy dla $\mathcal{L}$:

Próbka	$er_c(\mathcal{L}(.))$
D_3	0
...	...
D	0.25
...	...
D_2	0.375
...	...
D_1	0.5
...	...

Liczba takich próbek

$$|\mathcal{S}(3)| = \binom{8}{3} = 56$$

w tym:

- $\binom{4}{3} = 4$ próbki z trzema "1";

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla różnych próbek, różne są błędy dla $\mathcal{L}$:

Próbka	$er_c(\mathcal{L}(.))$
D_3	0
...	...
D	0.25
...	...
D_2	0.375
...	...
D_1	0.5
...	...

Liczba takich próbek

$$|\mathcal{S}(3)| = \binom{8}{3} = 56$$

w tym:

- $\binom{4}{3} = 4$ próbki z trzema "1";
- $\binom{4}{1}\binom{4}{2} = 24$ próbek z dwiema "1";

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla różnych próbek,
różne są błędy dla $\mathcal{L}$:

Próbka	$er_c(\mathcal{L}(.))$
D_3	0
...	...
D	0.25
...	...
D_2	0.375
...	...
D_1	0.5
...	...

Liczba takich próbek

$$|\mathcal{S}(3)| = \binom{8}{3} = 56$$

w tym:

- $\binom{4}{3} = 4$ próbki z trzema "1";
- $\binom{4}{1}\binom{4}{2} = 24$ próbek z dwiema "1";
- $\binom{4}{2}\binom{4}{1} = 24$ próbek z jedną "1";

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla różnych próbek, różne są błędy dla $\mathcal{L}$:

Próbka	$er_c(\mathcal{L}(.))$
D_3 ...	0 ...
D ...	0.25 ...
D_2 ...	0.375 ...
D_1 ...	0.5 ...

Liczba takich próbek

$$|\mathcal{S}(3)| = \binom{8}{3} = 56$$

w tym:

- $\binom{4}{3} = 4$ próbki z trzema "1";
- $\binom{4}{1}\binom{4}{2} = 24$ próbek z dwiema "1";
- $\binom{4}{2}\binom{4}{1} = 24$ próbek z jedną "1";
- $\binom{4}{3} = 4$ próbki bez "1";

Dla różnych próbek, różne są błędy dla $\mathcal{L}$:

Próbka	$er_c(\mathcal{L}(.))$
D_3 ...	0 ...
D ...	0.25 ...
D_2 ...	0.375 ...
D_1 ...	0.5 ...

Liczba takich próbek

$$|\mathcal{S}(3)| = \binom{8}{3} = 56$$

w tym:

- $\binom{4}{3} = 4$ próbki z trzema "1";
- $\binom{4}{1}\binom{4}{2} = 24$ próbek z dwiema "1";
- $\binom{4}{2}\binom{4}{1} = 24$ próbek z jedną "1";
- $\binom{4}{3} = 4$ próbki bez "1";

- $P(\{D \in \mathcal{S}(3) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.4)\}) = 52/56 = 92,9\%$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla różnych próbek, różne są błędy dla $\mathcal{L}$:

Próbka	$er_c(\mathcal{L}(.))$
D_3	0
...	...
D	0.25
...	...
D_2	0.375
...	...
D_1	0.5
...	...

Liczba takich próbek

$$|\mathcal{S}(3)| = \binom{8}{3} = 56$$

w tym:

- $\binom{4}{3} = 4$ próbki z trzema "1";
- $\binom{4}{1}\binom{4}{2} = 24$ próbek z dwiema "1";
- $\binom{4}{2}\binom{4}{1} = 24$ próbek z jedną "1";
- $\binom{4}{3} = 4$ próbki bez "1";

- $P(\{D \in \mathcal{S}(3) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.4)\}) = 52/56 = 92,9\%$
- $P(\{D \in \mathcal{S}(3) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.3)\}) = 28/56 = 0.5 = 50\%$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla różnych próbek, różne są błędy dla $\mathcal{L}$:

Próbka	$er_c(\mathcal{L}(.))$
D_3	0
...	...
D	0.25
...	...
D_2	0.375
...	...
D_1	0.5
...	...

Liczba takich próbek

$$|\mathcal{S}(3)| = \binom{8}{3} = 56$$

w tym:

- $\binom{4}{3} = 4$ próbki z trzema "1";
- $\binom{4}{1}\binom{4}{2} = 24$ próbek z dwiema "1";
- $\binom{4}{2}\binom{4}{1} = 24$ próbek z jedną "1";
- $\binom{4}{3} = 4$ próbki bez "1";

- $P(\{D \in \mathcal{S}(3) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.4)\}) = 52/56 = 92,9\%$
- $P(\{D \in \mathcal{S}(3) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.3)\}) = 28/56 = 0.5 = 50\%$
- $P(\{D \in \mathcal{S}(3) : er_c(\mathcal{L}(D)) = 0)\}) = 21,4\%$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla $m = 4$:

- Liczba próbek:

$$|\mathcal{S}(4)| = \binom{8}{4} = \mathbf{70}$$

  w tym:

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla $m = 4$:

- Liczba próbek:

$$|\mathcal{S}(4)| = \binom{8}{4} = 70$$

w tym:

- $\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\binom{4}{1} = 17$ próbek z co najmniej trzema "1";

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla $m = 4$:

- Liczba próbek:

$$|\mathcal{S}(4)| = \binom{8}{4} = 70$$

w tym:

- $\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\binom{4}{1} = 17$ próbek z co najmniej trzema "1";
- $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36 = 12 + 24$ próbek z dwiema "1";

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla $m = 4$:

- Liczba próbek:

$$|\mathcal{S}(4)| = \binom{8}{4} = 70$$

w tym:

- $\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\binom{4}{1} = 17$ próbek z co najmniej trzema "1";
- $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36 = 12 + 24$ próbek z dwiema "1";
- $\binom{4}{3}\binom{4}{1} = 16$ próbek z jedną "1";

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla $m = 4$:

- Liczba próbek:

$$|\mathcal{S}(4)| = \binom{8}{4} = 70$$

w tym:

- $\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\binom{4}{1} = 17$ próbek z co najmniej trzema "1";
- $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36 = 12 + 24$ próbek z dwiema "1";
- $\binom{4}{3}\binom{4}{1} = 16$ próbek z jedną "1";
- $\binom{4}{4} = 1$ próbki bez "1";

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla $m = 4$:

- Liczba próbek:

$$|\mathcal{S}(4)| = \binom{8}{4} = 70$$

  w tym:

  - $\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\binom{4}{1} = 17$ próbek z co najmniej trzema "1";
  - $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36 = 12 + 24$ próbek z dwiema "1";
  - $\binom{4}{3}\binom{4}{1} = 16$ próbek z jedną "1";
  - $\binom{4}{4} = 1$ próbki bez "1";

- $P(\{D \in \mathcal{S}(4) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.4\}) = 69/70 = 98,6\%$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla $m = 4$:

- Liczba próbek:

$$|\mathcal{S}(4)| = \binom{8}{4} = 70$$

  w tym:
  - $\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\binom{4}{1} = 17$ próbek z co najmniej trzema "1";
  - $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36 = 12 + 24$ próbek z dwiema "1";
  - $\binom{4}{3}\binom{4}{1} = 16$ próbek z jedną "1";
  - $\binom{4}{4} = 1$ próbki bez "1";
- $P(\{D \in \mathcal{S}(4) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.4)\}) = 69/70 = 98,6\%$
- $P(\{D \in \mathcal{S}(4) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.3)\}) = 53/70 = 75,7\%$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Dla $m = 4$:

- Liczba próbek:

$$|\mathcal{S}(4)| = \binom{8}{4} = 70$$

  w tym:
  - $\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\binom{4}{1} = 17$ próbek z co najmniej trzema "1";
  - $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36 = 12 + 24$ próbek z dwiema "1";
  - $\binom{4}{3}\binom{4}{1} = 16$ próbek z jedną "1";
  - $\binom{4}{4} = 1$ próbki bez "1";
- $P(\{D \in \mathcal{S}(4) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.4)\}) = 69/70 = 98,6\%$
- $P(\{D \in \mathcal{S}(4) : er_c(\mathcal{L}(D)) < 0.3)\}) = 53/70 = 75,7\%$
- $P(\{D \in \mathcal{S}(4) : er_c(\mathcal{L}(D)) = 0)\}) = 29/70 = 41,4\%$

Niech

- $\mathcal{X}$ – (skończony lub nieskończony) zbiór obiektów;

Niech

- $\mathcal{X}$ – (skończony lub nieskończony) zbiór obiektów;
- $\mathbb{C}$ – klasa pojęć w $\mathcal{X}$, tj. $\mathbb{C} = \{f : \mathcal{X} \to \{0, 1\}\}$

Niech

- $\mathcal{X}$ – (skończony lub nieskończony) zbiór obiektów;
- $\mathbb{C}$ – klasa pojęć w $\mathcal{X}$, tj. $\mathbb{C} = \{f : \mathcal{X} \to \{0, 1\}\}$
- $c \in \mathbb{C}$ – pojęcie docelowe lub funkcja celu;

Model PAC

Niech

- $\mathcal{X}$ – (skończony lub nieskończony) zbiór obiektów;
- $\mathbb{C}$ – klasa pojęć w $\mathcal{X}$, tj. $\mathbb{C} = \{f : \mathcal{X} \to \{0, 1\}\}$
- $c \in \mathbb{C}$ – pojęcie docelowe lub funkcja celu;

Idea modelu PAC (Probably Approximately Correct):

Czy dla każdych $1 > \varepsilon, \delta > 0$ istnieje m_0 takie, że

$$m \geqslant m_0 \Rightarrow \mu^m\{D \in \mathcal{S}(m, c) : er_\Omega(\mathcal{L}(D)) < \varepsilon\} > 1 - \delta$$

czyli, z „dużym prawdopodobieństwem” ($> 1 - \delta$) uczeń otrzymuje tak wygodną próbkę $D \in \mathcal{S}(m, c)$, że za jej pomocą znajdzie on „prawie dobrą hipotezę” (o błędzie $< \varepsilon$).

Plan wykładu

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

concept	instances							
c_*	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_1	$-$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_2	$+$	$-$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_3	$+$	$+$	$-$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
$\vdots$								
$c_{\lvert X_n \rvert -1}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$-$	$+$
$c_{\lvert X_n \rvert}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$-$

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

concept	instances							
c_*	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_1	$-$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_2	$+$	$-$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_3	$+$	$+$	$-$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
$\vdots$								
$c_{\lvert X_n \rvert - 1}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$-$	$+$
$c_{\lvert X_n \rvert}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$-$

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

concept	instances							
c_*	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_1	$-$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_2	$+$	$-$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_3	$+$	$+$	$-$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
$\vdots$								
$c_{\lvert X_n\rvert-1}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$-$	$+$
$c_{\lvert X_n\rvert}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$-$

- $\Pi_{\mathbb{C}}(1) = 2$

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

concept	instances							
c_*	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	+
c_1	−	+	+	+	$\cdots$	+	+	+
c_2	+	−	+	+	$\cdots$	+	+	+
c_3	+	+	−	+	$\cdots$	+	+	+
$\vdots$								
$c_{\|X_n\|-1}$	+	+	+	+	$\cdots$	+	−	+
$c_{\|X_n\|}$	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	−

- $\Pi_{\mathbb{C}}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(2) = 3$

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

concept	instances							
c_*	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_1	$-$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_2	$+$	$-$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_3	$+$	$+$	$-$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
$\vdots$								
$c_{\lvert X_n \rvert - 1}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$-$	$+$
$c_{\lvert X_n \rvert}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$-$

- $\Pi_{\mathbb{C}}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(2) = 3$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(3) = 4$

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

concept	instances							
c_*	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	+
c_1	−	+	+	+	$\cdots$	+	+	+
c_2	+	−	+	+	$\cdots$	+	+	+
c_3	+	+	−	+	$\cdots$	+	+	+
$\vdots$								
$c_{\lvert X_n\rvert-1}$	+	+	+	+	$\cdots$	+	−	+
$c_{\lvert X_n\rvert}$	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	−

- $\Pi_{\mathbb{C}}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(2) = 3$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(3) = 4$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(m) = m + 1$

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

concept	instances							
c_*	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_1	$-$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_2	$+$	$-$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_3	$+$	$+$	$-$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
$\vdots$								
$c_{\|X_n\|-1}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$-$	$+$
$c_{\|X_n\|}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$-$

- $\Pi_{\mathbb{C}}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(2) = 3$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(3) = 4$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(m) = m + 1$
- ...

Przykład

- $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $\mathbb{C} = \{c_i = \overline{x_i}\} \cup \{c^*\}$

concept	instances							
c_*	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_1	$-$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_2	$+$	$-$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
c_3	$+$	$+$	$-$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$
$\vdots$								
$c_{\vert X_n \vert - 1}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$-$	$+$
$c_{\vert X_n \vert}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$-$

- $\Pi_{\mathbb{C}}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(2) = 3$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(3) = 4$
- $\Pi_{\mathbb{C}}(m) = m + 1$
- ...
- $VCdim(\mathbb{C}) = 1$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

$\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;

$\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

$\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;

$\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów

- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(1) = 2$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

$\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;
$\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów

- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(2) = 4$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

$\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;
$\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów

- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(2) = 4$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(3) = 8$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

$\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;

$\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów

- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(2) = 4$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(3) = 8$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(4) = ?$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

$\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;
$\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów

- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(2) = 4$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(3) = 8$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(4) = ?$
- $VCdim(\mathbb{M}_3) = ?$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

$\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;
$\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów

- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(2) = 4$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(3) = 8$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(4) = ?$
- $VCdim(\mathbb{M}_3) = ?$
- $VCdim(\mathbb{M}_4) = ?$

Przykład: Uczenie jednomianów Boolowskich

Funkcje	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

$\mathbb{X} = \{0,1\}^3$;
$\mathbb{M}_3 =$ zbiór jednomianów

- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(1) = 2$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(2) = 4$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(3) = 8$
- $\Pi_{\mathbb{M}_3}(4) = ?$
- $VCdim(\mathbb{M}_3) = ?$
- $VCdim(\mathbb{M}_4) = ?$
- $VCdim(\mathbb{M}_n) = ?$

Jednomiany monotoniczne

M4+	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
x1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
x3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
x4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
x1x2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
x1x3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
x1x4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
x2x3	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
x2x4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
x3x4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
x1x2x4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1
x1x3x4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
x2x3x4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
x1x2x3x4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0