

Języki, automaty i obliczenia

Wykład 8: Obrazy przemienne języków. Automaty dwukierunkowe.

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

15 kwietnia 2026

1 Obrazy przemienne języków bezkontekstowych

2 Automaty dwukierunkowe

- Dla $w = a_1 \dots a_n \in A^*$, zdefiniujemy funkcję (multizbiór nad A)

$$\mathcal{P}(w) : A \rightarrow \mathbb{N} \qquad \mathcal{P}(w)(a) = |\{i \in \{1 \dots n\} : a_i = a\}|.$$

- Dla ustalonego liniowego porządku na alfabecie $A = \{b_1, \dots, b_k\}$,

$$b_1 < b_2 < \dots < b_k,$$

$\mathcal{P}(w)$ można utożsamiać z wektorem, $\mathcal{P}(w) \in \mathbb{N}^k$:

$$\mathcal{P}(w)(i) = \mathcal{P}(w)(b_i).$$

- *Obraz przemieniny* języka $L \subseteq A^*$ to:

$$\mathcal{P}(L) = \{\mathcal{P}(w) : w \in L\}.$$

Przykład

Niech $A = \{a, b\}$, $a < b$.

$$\mathcal{P}(\{a^n b^n a : n \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{P}((ab)^* a) = \{(n+1, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{P}(\text{palindromy}) = ?$$

Dla $P \subseteq \mathbb{N}^k$, zdefiniujemy $P^\oplus = \{p_1 + p_2 + \dots + p_m : m \geq 0, p_1, p_2, \dots, p_m \in P\}$.

Zbiór *liniowy* $X \subseteq \mathbb{N}^k$ to dowolny zbiór postaci

$b \in \mathbb{N}^k$ baza, $P \subseteq_{\text{fin}} \mathbb{N}^k$ okresy

$$\begin{aligned} X &= b + P^\oplus = \{b + p : p \in P^\oplus\} \\ &= \{b + p_1 + \dots + p_m : m \geq 0, p_1, \dots, p_m \in P\} \end{aligned}$$

Przykład

Niech $b = (1, 2)$, $P = \{(2, 0), (0, 3)\}$.

$$b + P^\oplus = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : n \equiv 1 \pmod{2}, m \equiv 2 \pmod{3}\}.$$

rysunek

Przykład

Niech $b = (0, 0)$, $P = \{(1, 1), (0, 3)\}$.

$$b + P^\oplus = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq m - n \equiv 0 \pmod{3}\}.$$

rysunek

Dla $P \subseteq \mathbb{N}^k$, zdefiniujemy $P^\oplus = \{p_1 + p_2 + \dots + p_m : m \geq 0, p_1, p_2, \dots, p_m \in P\}$.

Zbiór *liniowy* $X \subseteq \mathbb{N}^k$ to dowolny zbiór postaci

$b \in \mathbb{N}^k$ baza, $P \subseteq_{\text{fin}} \mathbb{N}^k$ okresy

$$\begin{aligned} X &= b + P^\oplus = \{b + p : p \in P^\oplus\} \\ &= \{b + p_1 + \dots + p_m : m \geq 0, p_1, \dots, p_m \in P\} \end{aligned}$$

Zbiór *semiliniowy* $X \subseteq \mathbb{N}^k$ to dowolna skończona suma zbiorów liniowych:

$$b_1 + P_1^\oplus \cup b_2 + P_2^\oplus \cup \dots \cup b_n + P_n^\oplus$$

Pytanie

Niech $B, P \subseteq_{\text{fin}} \mathbb{N}^k$. Czy $B + P^\oplus = \{b + p : b \in B, p \in P^\oplus\}$ jest (semi)liniowy?

Dla $k = 1$, zbiory semiliniowe to zbiory prawie okresowe.

Twierdzenie

Zbiór nieujemnych całkowitych rozwiązań układu równań liniowych o całkowitych współczynnikach jest postaci $B + P^\oplus$.

Obraz przemienny jest semiliniowy

Twierdzenie (Parikh 1961)

Obraz przemienny języka bezkontekstowego jest semiliniowy.

Wniosek

Dla każdego języka bezkontekstowego L istnieje język regularny R t.że

$$\mathcal{P}(L) = \mathcal{P}(R).$$

Dowód:

$$b_1 + P_1^{\oplus} \cup \dots \cup b_n + P_n^{\oplus}$$

$$b + \{p_1, \dots, p_m\}^{\oplus} \subseteq \mathbb{N}^k \quad \longmapsto \quad w (w_1 + \dots + w_m)^* \subseteq A^*$$

rysunek

Wniosek

Dla alfabetów jednoliterowych, (języki bezkontekstowe) = (języki regularne).

Obraz przemieniny jest semiliniowy (dowód)

Niech $L = L(\mathcal{G})$, gdzie $\mathcal{G} = (A, N, S, \alpha)$. Pokażemy, że $\mathcal{P}(L)$ jest semiliniowy.

- Dla $M \subseteq N$, niech $L_M \subseteq L$ zawiera słowa posiadające *M-drzewo wyprowadzenia*, tzn. takie, w którym pojawiają się wszystkie nieterminale z M (i żadne inne).

- Ponieważ

$$L = \bigcup_{M \subseteq N} L_M,$$

wystarczy pokazać, że $\mathcal{P}(L_M)$ jest semiliniowy, dla dowolnego $M \subseteq N$.

- Drzewo wyprowadzenia nazwijmy *płatkiem*, jeśli na żadnej gałęzi żaden nieterminał nie pojawia się więcej niż $|N|$ razy.

- Pokażemy, że $\mathcal{P}(L_M) = B_M + P_M^{\oplus}$, gdzie

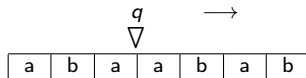
$$B_M = \{ \mathcal{P}(w) : w \text{ ma } \textit{płatkie } M\text{-drzewo wyprowadzenia} \}$$

$$P_M = \{ \mathcal{P}(wv) : wXv \text{ ma } \textit{płatkie } M'\text{-drzewo wyprowadzenia} \text{ o korzeniu } X, \\ \text{dla pewnego } X \in N, M' \subseteq M \}.$$

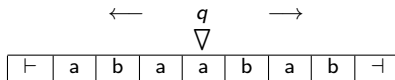
1 Obrazy przemienne języków bezkontekstowych

2 Automaty dwukierunkowe

Automaty jednokierunkowe:



Automaty dwukierunkowe:

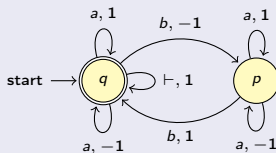


(Niedeterministyczny) *automat dwukierunkowy* $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$

$$\delta \subseteq Q \times (A \cup \{\vdash, \dashv\}) \times Q \times \{-1, 0, 1\}$$

$(q, a, q', k) \in \delta$: w stanie q czytaj a , zmień stan na q' , zmień pozycję o k

Przykład



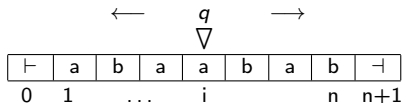
($\dashv$ nieużywane)

Konfiguracje automatu dwukierunkowego

Ustalmy automat dwukierunkowy $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$ i słowo

$$w = a_1 \dots a_n \in A^*.$$

Konfiguracja automatu $\mathcal{A}$ na słowie w to para $(q, i) \in Q \times \{0 \dots n+1\}$



Konfiguracje początkowe: $I \times \{1\}$

Konfiguracje akceptujące: $F \times \{n+1\}$

Zabramy przejść postaci

$$(q, \vdash, q', -1) \quad (q, \dashv, q', 1),$$

czyli:

$$\delta \cap (Q \times \{\vdash\} \times Q \times \{-1\} \cup Q \times \{\dashv\} \times Q \times \{1\}) = \emptyset$$

Definiujemy relację przejścia pomiędzy *konfiguracjami* automatu $\mathcal{A}$ na słowie w :

$$(q, i) \longrightarrow (q', i + k)$$

wtw. gdy

- $1 \leq i \leq n$ oraz δ zawiera przejście (q, a_i, q', k) , lub
- $i = 0$ oraz δ zawiera przejście $(q, \vdash, q', k)$, lub
- $i = n + 1$ oraz δ zawiera przejście $(q, \dashv, q', k)$.

Bieg na słowie w to ciąg konfiguracji

$$(q_0, i_0) \longrightarrow (q_1, i_1) \longrightarrow \dots \longrightarrow (q_m, i_m)$$

gdzie $q_0 \in I$ oraz $i_0 = 1$. Bieg jest *akceptujący* jeśli $q_m \in F$ oraz $i_m = n + 1$.

Pytanie

Jak długi może być bieg automatu dwukierunkowego na słowie w ?

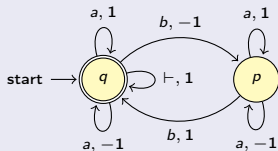
Język rozpoznawany przez $\mathcal{A}$:

$$L(\mathcal{A}) = \{ w \in A^* : \mathcal{A} \text{ ma bieg akceptujący na } w \}.$$

$$L(\mathcal{A}) = \{ w \in A^* : \mathcal{A} \text{ ma bieg akceptujący na } w \}.$$

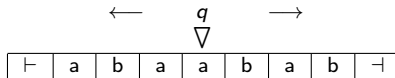
Pytanie

Jaki język rozpoznaje ten automat?



($\vdash$ nieużywane)

Automaty dwukierunkowe jako maszyny Turinga



Automaty dwukierunkowe = maszyny Turinga z taśmą tylko do odczytu

Automat dwukierunkowy $\mathcal{A} = (A, \vdash, \dashv, Q, I, F, \delta)$ jest *deterministyczny*, jeśli relacja przejścia jest funkcją:

$$\delta : Q \times (A \cup \{\vdash, \dashv\}) \rightarrow Q \times \{-1, 0, 1\}$$

Pytanie

Jaki język rozpoznaje ten automat?

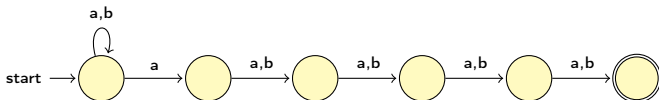
- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, p_0, p_1, a\}$
- $I = \{q_0\}$
- $F = \{a\}$

	$\vdash$	a	b	$\dashv$
q_0	$(q_0, +1)$	$(q_1, +1)$	$(q_0, +1)$	$(p_0, -1)$
q_1		$(q_2, +1)$	$(q_1, +1)$	
q_2		$(q_0, +1)$	$(q_2, +1)$	
p_0	$(a, +1)$	$(p_0, -1)$	$(p_1, -1)$	
p_1		$(p_1, -1)$	$(p_0, -1)$	
a	$(a, +1)$	$(a, +1)$	$(a, +1)$	

Pytanie

Ile stanów musi mieć deterministyczny automat dwukierunkowy dla języka

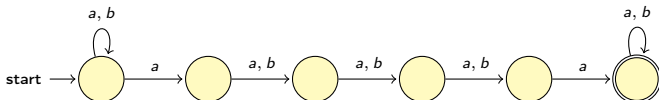
$$L_n = A^* a A^{n-1}?$$

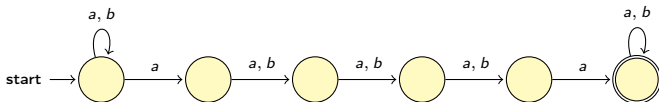


Pytanie

Ile stanów musi mieć deterministyczny automat dwukierunkowy dla języka

$$L_n = A^* a A^{n-1} a A^*?$$





Odpowiedź

deterministyczny automat dwukierunkowy dla języka $L_n = A^* a A^{n-1} a A^*$:

idź w prawo do pierwszej a

idź n kroków w prawo

jeśli a to akceptuj

w.p.p.

idź $n - 1$ kroków w lewo

kontynuuj od pierwszej instrukcji

wyjątek: jeśli $\neg$ to odrzuć

Pytanie

Czy automaty dwukierunkowe rozpoznają więcej języków niż jednokierunkowe?

Twierdzenie (Rabin, Scott 1959; Shepardson 1959)

$(\text{Automaty dwukierunkowe}) \equiv (\text{automaty jednokierunkowe})$.

Dowód (Vardi 1989):

Niech $\mathcal{A} = (A, \vdash, \neg, Q, I, F, \delta)$ automat dwukierunkowy.

Fakt

$w = a_1 \dots a_n \notin L(\mathcal{A})$ wtw. gdy $\exists P_0, P_1, \dots, P_{n+1} \subseteq Q$ t.że

- $I \subseteq P_1$
- $\forall i \in \{0 \dots n+1\}, \forall (q, a_i, q', k) \in \delta, q \in P_i \implies q' \in P_{i+k}$
- $F \cap P_{n+1} = \emptyset$ ($a_0 = \vdash, a_{n+1} = \neg$)

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
$\vdash$	a	b	a	a	b	a	b	$\neg$

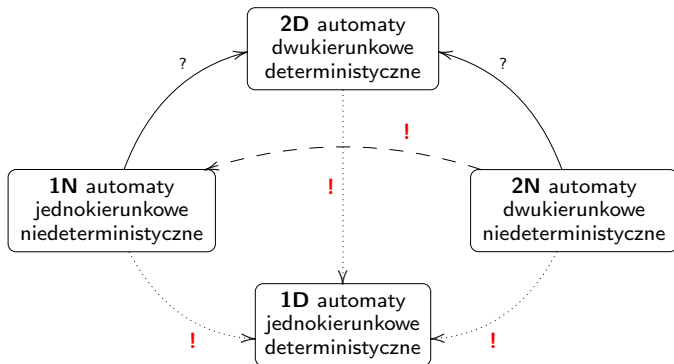
P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
$\vdash$	a	b	a	a	b	a	b	$\neg$

$$(P_0, P_1) \xrightarrow{a} (P_1, P_2) \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{a} (P_6, P_7) \xrightarrow{b} (P_7, P_8)$$

Dowód (c.d.): Definiujemy niedeterministyczny automat jednokierunkowy $\mathcal{A}'$:

- $Q' = \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)$
- $\delta' = \{((P, P'), a, (P', P'')) : \begin{array}{l} \forall p' \in P', q \in Q. (p', a, q, -1) \in \delta \implies q \in P \\ \forall p' \in P', q \in Q. (p', a, q, 0) \in \delta \implies q \in P' \\ \forall p' \in P', q \in Q. (p', a, q, 1) \in \delta \implies q \in P'' \end{array}\}$
- $I' = \{(P, P') : \begin{array}{l} I \subseteq P' \\ \forall p \in P, q \in Q. (p, \vdash, q, 0) \in \delta \implies q \in P \\ \forall p \in P, q \in Q. (p, \vdash, q, 1) \in \delta \implies q \in P' \end{array}\}$
- $F' = \{(P, P') : \begin{array}{l} P' \cap F = \emptyset \\ \forall p' \in P', q \in Q. (p', \neg, q, 0) \in \delta \implies q \in P' \\ \forall p' \in P', q \in Q. (p', \neg, q, -1) \in \delta \implies q \in P \end{array}\}$

Z faktu z poprzedniego slajdu wynika: $w \in L(\mathcal{A}') \iff w \notin L(\mathcal{A})$



W następnym odcinku:

