

Języki, automaty i obliczenia

Wykład 7: Własności języków bezkontekstowych

Sławomir Lasota

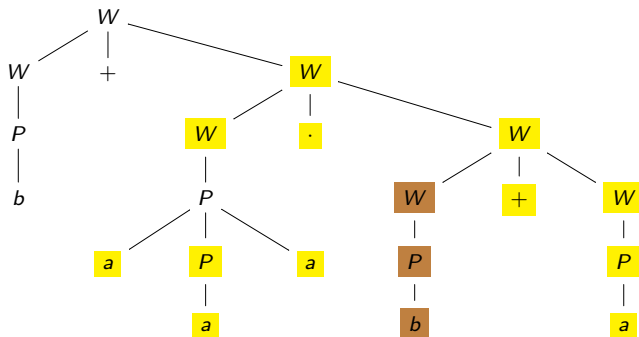
Uniwersytet Warszawski

8 kwietnia 2026

1 Pompowanie języków bezkontekstowych

2 Deterministyczne automaty ze stosem

3 Własności domknięcia



Lemat o pompowaniu

Dla każdego języka bezkontekstowego L istnieje $n > 0$ takie, że każde słowo $x \in L$, $|x| \geq n$, można przedstawić jako

$$x = w y u z v, \text{ gdzie } |y z| > 0 \text{ i } |y u z| \leq n$$

i dla każdego $m \geq 0$, $w y^m u z^m v \in L$.

$$L \text{ jest bezkontekstowy} \implies \exists n \forall x \in L \exists x = wyuzv \forall m \ w y^m u z^m v \in L$$

Wniosek

L nie jest bezkontekstowy, jeśli dla każdego $n > 0$, istnieje słowo $x \in L$, $|x| \geq n$ takie, że dla każdego przedstawienia x jako

$$x = w y u z v, \text{ gdzie } |y z| > 0 \text{ i } |y u z| \leq n,$$

istnieje $m \geq 0$ takie, że $w y^m u z^m v \notin L$.

$$L \text{ nie jest bezkontekstowy} \iff \underbrace{\forall n \exists x \in L}_{\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L} \forall x = wyuzv \exists m \ w y^m u z^m v \notin L$$

Lemat o pompowaniu

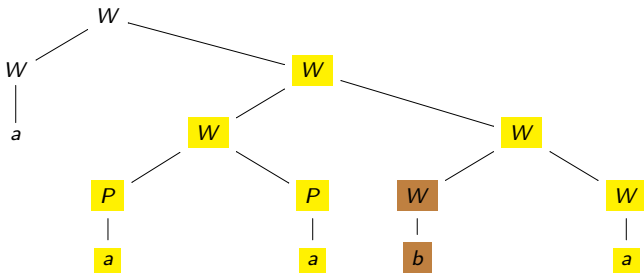
Dla każdego języka bezkontekstowego L istnieje $n > 0$ takie, że każde słowo $x \in L$, $|x| \geq n$, można przedstawić jako

$$x = w y u z v, \text{ gdzie } |y z| > 0 \text{ i } |y u z| \leq n$$

i dla każdego $m \geq 0$, $w y^m u z^m v \in L$.

Dowód:

Niech $\mathcal{G} = (A, N, S, \alpha)$ gramatyka w postaci Chomsky'ego dla $L - \{\varepsilon\}$, $n := 2^{|N|}$. Każde drzewo wyprowadzenia dla słowa długości $> 2^{|N|-1}$ ma ścieżkę długości $> |N|$. Rozważmy drzewo wyprowadzenia dla słowa długości $\geq 2^{|N|}$ oraz jego minimalne poddrzewo o plonie długości $> 2^{|N|-1}$.



$$L \text{ nie jest bezkontekstowy} \iff \underbrace{\forall n \exists x \in L}_{\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}} \forall x = wyuzv \exists m \ w y^m u z^m v \notin L$$

Przykład

Pokażemy, że język

$$L = \{ w w : w \in \{a, b\}^* \}$$

nie jest bezkontekstowy. Dla dowolnego $n > 0$ rozważmy słowo

$$x_n = a^n b^n a^n b^n \in L.$$

Rozważmy dowolne słowa w, y, u, z, v takie, że

$$x_n = w y u z v, \text{ gdzie } |y z| > 0 \text{ i } |y u z| \leq n.$$

Przypadki: albo każde ze słów y, z należy w całości do 1 bloku, albo któreś z nich przecina 2 sąsiednie bloki (a wtedy drugie z nich należy do jednego z tych bloków).

Przykład

Język

$$\{ a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N} \}$$

nie jest bezkontekstowy.

L jest bezkontekstowy $\implies \exists n \forall x \in L \exists x=wyuzv \forall m \ w y^m u z^m v \in L$

Przykład

Nie uda nam się w podobny sposób pokazać, że język

$$L = \{ a^i b^j c^k : i \neq j \neq k \neq i \}$$

nie jest bezkontekstowy.

Niech $n = 4$ i $x = a^i b^j c^k \in L$ dowolne, $|x| \geq n$.

B.u.o. $k > i, j > 0$. Wtedy $k \geq 3$. Niech

$$w \in a^i b^j c^*, \quad y u z v \in c^+, \quad |yz| \neq k - i, k - j.$$

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$, $w y^m u z^m v \in L$. **Pompowanie nie działa...**

Podobny kontrprzykład można podać dla języków regularnych.

Rozważmy słowa z *zaznaczonymi* pozycjami. Np. słowo

$a \underline{a} \underline{a} b a a a \underline{b}$

ma zaznaczone 3 pozycje.

Niech $|w|$ oznacza liczbę zaznaczonych pozycji w słowie w .

Lemat o pompowaniu (Ogden 1968)

Dla każdego języka bezkontekstowego L istnieje $n > 0$ takie, że każde słowo $x \in L$, $|x| \geq n$, można przedstawić jako

$$x = w y u z v, \text{ gdzie } |y z| > 0 \text{ i } |y u z| \leq n$$

i dla każdego $m \geq 0$, $w y^m u z^m v \in L$.

$$L \text{ jest bezkontekstowy} \implies \exists n \forall x \in L \exists x = wyuzv \forall m \ w y^m u z^m v \in L$$

Dowód:

Tak samo.

$$L \text{ nie jest bezkontekstowy} \iff \underbrace{\forall n \exists x \in L}_{\exists (x_n)_n \in L} \forall x = wyuzv \exists m w y^m u z^m v \notin L$$

Przykład

Pokażemy, że język

$$L = \{ a^i b^j c^k : i \neq j \neq k \neq i \}$$

nie jest bezkontekstowy. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy słowo

$$x_n = \underline{a}^n b^{n+n!} c^{n+2n!} \in L.$$

Rozważmy dowolne słowa w, y, u, z, v takie, że

$$x_n = w y u z v, \text{ gdzie } |y z| > 0 \text{ i } |y u z| \leq n.$$

Wtedy któreś ze słów y, z musi zawierać przynajmniej jedno a .

Trzy istotne przypadki: albo $yz \in a^+$, albo $y \in a^+, z \in b^*$, albo $y \in a^+, z \in c^*$.

1 Pompowanie języków bezkontekstowych

2 Deterministyczne automaty ze stosem

3 Własności domknięcia

Automat ze stosem $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta)$.

Niech $\delta(q, s, a) = \{ (p, w) \in Q \times S^* : q \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(w)} p \}$.

Automat $\mathcal{A}$ jest *deterministyczny*, jeśli dla każdej pary $(q, s) \in Q \times S$:

(ε) albo $\delta(q, s, a) = \emptyset$ dla każdego $a \in A$, oraz $|\delta(q, s, \varepsilon)| = 1$;

(A) albo $|\delta(q, s, a)| = 1$ dla każdego $a \in A$, oraz $\delta(q, s, \varepsilon) = \emptyset$.

Konfiguracja $c = (q, sw)$ jest

(ε) albo *niestabilna*: $\exists! c'. c \xrightarrow{\varepsilon} c'$;

(A) albo *stabilna*: $\forall a \in A. \exists! c'. c \xrightarrow{a} c'$.

Automat niedeterministyczny:

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q, q_f\}$
- $F = \{q_f\}$
- $S = \{s_0, s\}$

$$q_0 \xrightarrow{\text{pop}(s_0), a, \text{push}(ss_0)} q_0$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(ss)} q_0$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{pop}(s_0), \varepsilon, \text{push}(s_0)} q$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{pop}(s), \varepsilon, \text{push}(s)} q$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s_0), \varepsilon, \text{push}(\varepsilon)} q_f$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s), b, \text{push}(\varepsilon)} q$$

Automat deterministyczny:

- $Q = \{q_0, \bar{q}, q, q_f\}$
- $F = \{q_0, q_f\}$

$$q_0 \xrightarrow{\text{pop}(s_0), a, \text{push}(ss_0)} \bar{q}$$

$$\bar{q} \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(ss)} \bar{q}$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s_0), \varepsilon, \text{push}(\varepsilon)} q_f$$

$$\bar{q} \xrightarrow{\text{pop}(s), b, \text{push}(\varepsilon)} q$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s), b, \text{push}(\varepsilon)} q$$

Pytanie

Czy (deterministyczne automaty ze stosem) $\equiv$ (automaty ze stosem)?

$$\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$$

Pytanie

Czy (deterministyczne automaty ze stosem) $\equiv$ (deterministyczne automaty ze stosem bez pustych przejść) ?

$$\{a^n b^m a^n : n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^m c b^m a^n : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Problem równości

Dane: języki bezkontekstowe L , M

Wynik: czy $L = M$?

Twierdzenie (Sénizergues 1997)

Problem równości deterministycznych języków bezkontekstowych jest rozstrzygalny.

nagroda Gödla '2002 !

Pytanie

Czy automat deterministyczny ma dokładnie jeden bieg na każdym słowie?

Automat $\mathcal{A}$ jest *jednoznaczny*, jeśli $\mathcal{A}$ ma dokładnie jeden bieg akceptujący dla każdego akceptowanego słowa.

Twierdzenie

Każdy automat deterministyczny jest równoważny jednoznacznemu.

Przykład

Języki jednoznaczne, ale nie deterministyczne:

$$\{ w w^R : w \in \{a, b\}^* \} \qquad \{ a^n b^n : n \in \mathbb{N} \} \cup \{ a^n b^{2n} : n \in \mathbb{N} \}$$

Twierdzenie

(jednoznaczne automaty ze stosem) $\equiv$ (jednoznaczne gramatyki bezkontekstowe).

1 Pompowanie języków bezkontekstowych

2 Deterministyczne automaty ze stosem

3 Własności domknięcia

Fakt (języki bezkontekstowe są zamknięte na podstawienia)

$$\begin{array}{l} L \subseteq A^* \text{ bezkontekstowy} \\ h : A \rightarrow \mathcal{P}(B^*), \forall a \in A. h(a) \text{ bezkontekstowy} \end{array} \implies \widehat{h}(L) \text{ bezkontekstowy.}$$

W szczególności języki bezkontekstowe są zamknięte na obrazy homomorficzne:

$$\begin{array}{l} L \subseteq A^* \text{ bezkontekstowy} \\ h : A \rightarrow B^* \text{ homomorfizm} \end{array} \implies \vec{h}(L) \text{ bezkontekstowy.}$$

Fakt (języki bezkontekstowe są zamknięte na przeciwobrazy homomorficzne)

$$\begin{array}{l} L \subseteq B^* \text{ bezkontekstowy} \\ h : A \rightarrow B^* \text{ homomorfizm} \end{array} \implies \vec{h}^{-1}(L) \text{ bezkontekstowy.}$$

Fakt

Języki bezkontekstowe są zamknięte na sumy, konkatenacje, iteracje (gwiazdkę).

Dowód:

Gramatyki.

Fakt

Języki bezkontekstowe nie są zamknięte na przecięcia.

Dowód:

Język $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\} c^* \cap a^* \{b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest bezkontekstowy.

Wniosek

Języki bezkontekstowe nie są zamknięte na dopełnienia.

Na przykład języki

$$\{w w : w \in \{a, b\}^*\} \quad \{a^i b^j c^k : i \neq j \neq k \neq i\}$$

nie są bezkontekstowe, a ich dopełnienia są (dlaczego?).

Twierdzenie

Deterministyczne języki bezkontekstowe są zamknięte na dopełnienia.

Na przykład dopełnienia języków

$$\{ a^n b^n : n \in \mathbb{N} \} \qquad \{ w \$ w^R : w \in A^* \}$$

są deterministycznymi językami bezkontekstowymi, a następujący język nie (za chwilę zobaczymy dlaczego):

$$L = \{ a^i b^j c^k : i = j \vee j = k \vee i = k \}.$$

Fakt

Deterministyczne języki bezkontekstowe nie są zamknięte na przecięcia.

Dowód:

j.w.

Wniosek

Deterministyczne języki bezkontekstowe nie są zamknięte na sumy.

Zestawienie własności domknięcia

operacja	języki bezkontekstowe	deterministyczne języki bezkontekstowe
konkatenacja	✓	
iteracja (gwiazdka)	✓	
suma	✓	
przecięcie		
dopełnienie		✓
podstawienie/obraz	✓	
przeciwwobraz	✓	✓

Fakt

Jeśli L jest (deterministycznym) językiem bezkontekstowym a R jest regularny, to

$$L \cap R$$

$$L \cup R$$

$$R^{-1}L$$

$$L \otimes R$$

jest (deterministycznym) językiem bezkontekstowym.

Dowód: Produkt automatu ze stosem i automatu bez.

Przykład

Gdyby język

$$L = \{ a^i b^j c^k : i = j \vee j = k \vee i = k \}$$

był deterministyczny bezkontekstowy, to język

$$\{ a^i b^j c^k : i \neq j \neq k \neq i \} = (\{a, b, c\}^* - L) \cap a^* b^* c^*$$

musiałby być (deterministyczny) bezkontekstowy.

W następnym odcinku:

