

Języki, automaty i obliczenia



Wykład 6: Automaty ze

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

1 kwietnia 2026

- 1 Automaty ze stosem
- 2 Warianty automatów ze stosem
- 3 Równoważność gramatyk bezkontekstowych i automatów ze stosem
- 4 Weryfikacja programów rekurencyjnych

Automat ze stosem:

$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta)$$

- A – alfabet wejściowy
- Q – zbiór stanów
- $q_0 \in Q$ – stan początkowy
- $F \subseteq Q$ – stany akceptujące
- S – alfabet stosowy
- $s_0 \in S$ – symbol początkowy
- $\delta \subseteq_{\text{fin}} Q \times S \times (A \cup \{\epsilon\}) \times Q \times S^*$

Notacja

Przejście $(q, s, a, q', w) \in \delta$ będziemy zapisywać jako

$$q, s \xrightarrow{a} q', w \quad \text{albo} \quad q \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(w)} q' \quad \text{albo} \quad qs \xrightarrow{a} q'w.$$

Przejście $q \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(w)} q'$:

- umożliwiające jest w stanie q , jeśli na szczycie stosu jest symbol s
- czyta z wejścia $a \in A \cup \{\epsilon\}$
- zmienia stan z q na q'
- zastępuje na stosie symbol s przez słowo w

- *Konfiguracja* automatu ze stosem: $c = (q, v) \in Q \times S^*$.
- Konfiguracja początkowa: $c_0 = (q_0, s_0)$.
- Konfiguracje akceptujące: (q, v) , $q \in F$.
- Relacja przejścia pomiędzy konfiguracjami:

$$c \xrightarrow{a} c' \quad (a \in A \cup \{\varepsilon\})$$

jeśli $q, s \xrightarrow{a} q', w$, $c = (q, s v)$, $c' = (q', w v)$ dla pewnego $v \in S^*$.

- Rozszerzamy relację przejścia (*bieg* automatu na słowie w):

$$c \xrightarrow{w} c' \quad (w \in A^*)$$

jeśli

$$c \xrightarrow{a_1} c_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_m} c_m = c'$$

dla $a_1, \dots, a_m \in A \cup \{\varepsilon\}$ t.ż. $a_1 a_2 \dots a_m = w$ (ale niekoniecznie $m = |w|$).

$$L(\mathcal{A}) = \{ w \in A^* : c_0 \xrightarrow{w} c \text{ dla jakiejś konfiguracji akceptującej } c \}$$

Przykład

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q, q_f\}$
- $F = \{q_f\}$
- $S = \{s_0, s\}$

$$q_0 \xrightarrow{\text{pop}(s_0), a, \text{push}(ss_0)} q_0$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{pop}(s_0), \varepsilon, \text{push}(s_0)} q$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s_0), \varepsilon, \text{push}(\varepsilon)} q_f$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(ss)} q_0$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{pop}(s), \varepsilon, \text{push}(s)} q$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s), b, \text{push}(\varepsilon)} q$$

$$(q_0, s_0) \xrightarrow{a} (q_0, ss_0) \xrightarrow{a} (q_0, sss_0) \xrightarrow{\varepsilon} (q, sss_0) \xrightarrow{b} (q, ss_0) \xrightarrow{b} (q, s_0) \xrightarrow{\varepsilon} (q_f, \varepsilon)$$

$$L(\mathcal{A}) = ?$$

Pytanie

Czy podczas biegu stos może być pusty?

- 1 Automaty ze stosem
- 2 **Warianty automatów ze stosem**
- 3 Równoważność gramatyk bezkontekstowych i automatów ze stosem
- 4 Weryfikacja programów rekurencyjnych

Osłabienie:

- pojedyncze operacje na stosie: push, pop, nop
- brak stanów
- brak pustych przejść
- brak pustych przejść i stanów
- ...

Wzmocnienie:

- przepisywanie prefiksowe
- ...

Warianty akceptacji:

- akceptacja przez pusty stos
- akceptacja przez pusty stos i stan
- ...

Pojedyncze operacje na stosie: push, pop, nop

$$\delta \subseteq Q \times \{ \text{push}(s), \text{pop}(s), \text{nop} : s \in S \} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Q$$

Przykład

$$q_0 \xrightarrow{\text{push}(s), a} q_0$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{nop}, \varepsilon} q$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s_0), \varepsilon} q_f$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s), b} q$$

$$q \xrightarrow{\text{push}(s), a} q'$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(r), a, \text{push}(sr)} q' \quad (r \in S)$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s), a} q'$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(\varepsilon)} q'$$

$$q \xrightarrow{\text{nop}, a} q'$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(r), a, \text{push}(r)} q' \quad (r \in S)$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(s_3 s_2 s_1)} q'$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s), a} q_1 \quad \text{dodatkowe stany } q_1, q_2, q_3$$

$$q_1 \xrightarrow{\text{push}(s_1), \varepsilon} q_2$$

$$q_2 \xrightarrow{\text{push}(s_2), \varepsilon} q_3$$

$$q_3 \xrightarrow{\text{push}(s_3), \varepsilon} q'$$

Osłabienie:

- pojedyncze operacje na stosie: push, pop, nop
- brak stanów
- brak pustych przejść
- brak pustych przejść i stanów
- ...

Wzmocnienie:

- przepisywanie prefiksowe
- ...

Warianty akceptacji:

- akceptacja przez pusty stos
- akceptacja przez pusty stos i stan
- ...

Skończony zbiór przejść:

$$\delta \subseteq_{\text{fin}} Q \times S^* \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times S^*$$

Przejście $q \xrightarrow{\text{pop}(w), a, \text{push}(w')} q'$: $qw \xrightarrow{a} q'w'$

- umożliwiające jest w stanie q , jeśli na szczycie stosu jest słowo w
- czyta z wejścia $a \in A \cup \{\varepsilon\}$
- zmienia stan z q na q'
- zastępuje na stosie słowo w przez słowo w'

Twierdzenie

(przepisywanie prefiksowe) $\equiv$ (automaty ze stosem).

Dowód:

$$q \xrightarrow{\text{pop}(r_3 r_2 r_1), a, \text{push}(s_2 s_1)} q'$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(r_3), \varepsilon} q_2$$

dodatkowe stany q_0, q_1, q'_1, q_2

$$q_2 \xrightarrow{\text{pop}(r_2), \varepsilon} q_1$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{push}(s_1), \varepsilon} q'_1$$

$$q_1 \xrightarrow{\text{pop}(r_1), \varepsilon} q_0$$

$$q'_1 \xrightarrow{\text{push}(s_2), a} q'$$

Osłabienie:

- pojedyncze operacje na stosie: push, pop, nop
- brak stanów
- brak pustych przejść
- brak pustych przejść i stanów
- ...

Wzmocnienie:

- przepisywanie prefiksowe
- ...

Warianty akceptacji:

- akceptacja przez pusty stos
- akceptacja przez pusty stos i stan
- ...

Konfiguracje akceptujące: $(q, \varepsilon), q \in Q$

Przykład

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q, q_f\}$
- $S = \{s_0, s\}$

$$q_0 \xrightarrow{\text{push}(s), a} q_0$$

$$q_0 \xrightarrow{\text{nop}, \varepsilon} q$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s_0), \varepsilon} q_f$$

$$q \xrightarrow{\text{pop}(s), b} q$$

Twierdzenie

$(\text{automaty ze stosem}) \equiv (\text{automaty ze stosem akceptujące przez pusty stos}).$

$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, S, s_0, \delta) \quad \longmapsto \quad \mathcal{A}' = (A, Q', q'_0, F', S', s'_0, \delta')$$

- $Q' = Q \cup \{q'_0, q'_f\}$
- $F' = \{q'_f\}$
- $S' = S \cup \{s'_0\}$
- $\delta' = \delta \cup \{q'_0 \xrightarrow{\text{pop}(s'_0), \varepsilon, \text{push}(s'_0)} q_0\} \cup \{q \xrightarrow{\text{pop}(s'_0), \varepsilon, \text{push}(\varepsilon)} q'_f : q \in Q\}$

$$\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta) \quad \longmapsto \quad \mathcal{A}' = (A, Q', q'_0, S', s'_0, \delta')$$

- $Q' = Q \cup \{q'_0, q_\varepsilon\}$
- $S' = S \cup \{s'_0\}$
- $\delta' = \delta \cup \{q'_0 \xrightarrow{\text{pop}(s'_0), \varepsilon, \text{push}(s'_0)} q_0\} \cup \{q \xrightarrow{\text{pop}(s), \varepsilon, \text{push}(s)} q_\varepsilon : q \in F, s \in S'\} \cup \{q_\varepsilon \xrightarrow{\text{pop}(s), \varepsilon, \text{push}(\varepsilon)} q_\varepsilon : s \in S'\}$

Pytanie

A automaty ze stosem akceptujące przez pusty stos i stan akceptujący ?

Osłabienie:

- pojedyncze operacje na stosie: push, pop, nop
- brak stanów
- brak pustych przejść
- brak pustych przejść i stanów
- ...

Wzmocnienie:

- przepisywanie prefiksowe
- ...

Warianty akceptacji:

- akceptacja przez pusty stos
- akceptacja przez pusty stos i stan
- ...

- 1 Automaty ze stosem
- 2 Warianty automatów ze stosem
- 3 Równoważność gramatyk bezkontekstowych i automatów ze stosem
- 4 Weryfikacja programów rekurencyjnych

Automat ze stosem bez stanów:

$$\mathcal{A} = (A, S, s_0, \delta)$$

- A – alfabet wejściowy
- S – alfabet stosowy
- $s_0 \in S$ – symbol początkowy
- $\delta \subseteq_{\text{fin}} S \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times S^*$

$$s \xrightarrow{a} w$$

Twierdzenie

(automaty ze stosem) $\equiv$ (automaty ze stosem bez stanów).

Dowód:

Niech $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, S, s_0, \delta)$. Definiujemy $\mathcal{A}' = (A, S', s'_0, \delta')$:

- $S' = Q \times S \times Q$
- $s'_0 = (q_0, s_0, q)$, **q – dowolny stan**

$$s'_0 = \left\langle \begin{array}{c} q_0 \\ s_0 \\ q \end{array} \right\rangle$$

Konstrukcja równoważnego automatu bez stanów

- dla każdego przejścia $(q \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(\varepsilon)} p) \in \delta$, relacja δ' zawiera przejście

$$\left\langle \begin{array}{c} q \\ s \\ p \end{array} \right\rangle \xrightarrow{a} \varepsilon$$

- dla każdego przejścia $(q \xrightarrow{\text{pop}(s), a, \text{push}(s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1)} p) \in \delta$ ($n \geq 1$), i dowolnych stanów $q_1, q_2, \dots, q_n$, relacja δ' zawiera przejścia

$$\left\langle \begin{array}{c} q \\ s \\ q_1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{a} \begin{array}{c} \left\langle \begin{array}{c} p \\ s_n \\ q_n \end{array} \right\rangle \\ \left\langle \begin{array}{c} q_n \\ s_{n-1} \\ q_{n-1} \end{array} \right\rangle \\ \dots \\ \left\langle \begin{array}{c} q_3 \\ s_2 \\ q_2 \end{array} \right\rangle \\ \left\langle \begin{array}{c} q_2 \\ s_1 \\ q_1 \end{array} \right\rangle \end{array}$$

Poprawność wynika z obserwacji:

$$\left\langle \begin{array}{c} q \\ s \\ p \end{array} \right\rangle \xrightarrow{w} \varepsilon \iff (q, s) \xrightarrow{w} (p, \varepsilon),$$

którą nietrudno dowieść przez indukcję względem długości biegu.

rysunek

Udowodniliśmy:

Twierdzenie

$(\text{automaty ze stosem}) \equiv (\text{automaty ze stosem bez stanów}).$

Twierdzenie

$(\text{automaty ze stosem}) \equiv (\text{gramatyki bezkontekstowe}).$

Dowód:

Zakładamy, że słowo puste nie należy do języka.

Automat ze stosem bez stanów:

$$\mathcal{A} = (A, S, s_0, \delta)$$

$$(s \xrightarrow{a} w) \in \delta$$

Gramatyka (w postaci Greibach):

$$\mathcal{G} = (A, N, s_0, \alpha)$$

$$(s \longrightarrow a w) \in \alpha$$

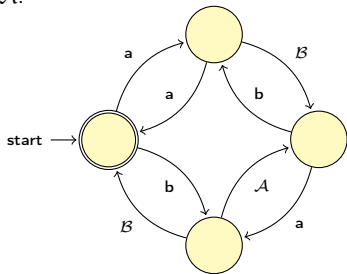
$\iff$

Wniosek

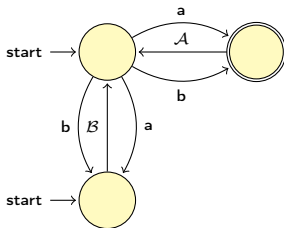
$(\text{automaty ze stosem}) \equiv (\text{automaty ze stosem bez pustych przejść i bez stanów}).$

- 1 Automaty ze stosem
- 2 Warianty automatów ze stosem
- 3 Równoważność gramatyk bezkontekstowych i automatów ze stosem
- 4 Weryfikacja programów rekurencyjnych

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Twierdzenie

Zbiór konfiguracji osiągalnych w automacie ze stosem jest *efektywnie* regularny.

Automat ze stosem $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, F, S, s_0, \delta)$

Konfiguracja: $c = (q, v) \in Q \times S^*$.

$c = qv \in QS^*$.

Zbiór konfiguracji $L \subseteq QS^*$.

Lemat

Dla regularnego zbioru konfiguracji $L \subseteq QS^*$,

zbiór konfiguracji **osiągalnych wstecz** ze zbioru L jest *efektywnie* regularny.

Lemat

Dla regularnego zbioru konfiguracji $L \subseteq QS^*$,
 zbiór konfiguracji osiągalnych wstecz ze zbioru L jest efektywnie regularny.

Przykład

$$q_0s_0 \xrightarrow{a} q_0ss_0$$

$$q_0s_0 \xrightarrow{\varepsilon} qs_0$$

$$qs_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f$$

$$q_0s \xrightarrow{a} q_0ss$$

$$q_0s \xrightarrow{\varepsilon} qs$$

$$qs \xrightarrow{b} q$$

rysunek

$$q_0s_0 \longrightarrow q_0ss_0$$

$$q_0s_0 \longrightarrow qs_0$$

$$qs_0 \longrightarrow q_f$$

$$q_0s \longrightarrow q_0ss$$

$$q_0s \longrightarrow qs$$

$$qs \longrightarrow q$$

W następnym odcinku:

