

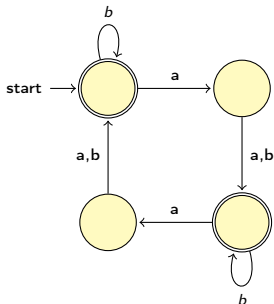
Języki, automaty i obliczenia

Wykład 4: Minimalizacja automatów

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

18 marca 2026



- 1 Języki regularne mają skończenie wiele ilorazów lewostronnych
- 2 Minimalizacja automatów deterministycznych
- 3 *Minimalizacja automatów niedeterministycznych?

Notacja

$w^{-1}L$ zamiast $\{w\}^{-1}L = \{u \in A^* : wu \in L\}$

Język $L \subseteq A^*$ określa relację równoważności w A^* :

$$w \sim_L v \iff w^{-1}L = v^{-1}L$$

Równoważnie:

$$w \sim_L v \iff \forall u \in A^*. (wu \in L \iff vu \in L)$$

Fakt ($\sim_L$ jest L -niezmiennicza)

$$w \sim_L v \implies (w \in L \iff v \in L)$$

rysunek

Dowód:

$$w \in L \iff \varepsilon \in w^{-1}L$$

$$w \sim_L v \iff w^{-1}L = v^{-1}L \iff \forall u \in A^*. (wu \in L \iff vu \in L)$$

Przykład

$A = \{a, b\}$	$\varepsilon^{-1}L = L$	$\varepsilon \sim_L ab \sim_L abab \sim_L \dots$
$L = (ab)^*$	$a^{-1}L = bL$	$a \sim_L aba \sim_L ababa \sim_L \dots$
	$b^{-1}L = \emptyset$	$b \sim_L aa \sim_L abb \sim_L \dots$

$A = \{a, b\}$	$(a^k)^{-1}L = \{a^n b^{n+k} : n \in \mathbb{N}\}$
$L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$	

Twierdzenie (Myhill-Nerode 1958)

Niech $L \subseteq A^*$. Następujące warunki są równoważne:

- L jest regularny
- $\sim_L$ ma skończony indeks

Dowód (L regularny $\implies \sim_L$ ma skończony indeks)

Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny rozpoznający L .

Dla $q \in Q$, niech $L_q(\mathcal{A}) = \{w \in A^* : \hat{\delta}(q, w) \in F\}$.

Fakt

$L_{\hat{\delta}(q_0, w)}(\mathcal{A}) = w^{-1}L$, dla każdego $w \in A^*$.

Zdefiniujmy relację równoważności $\sim_{\mathcal{A}}$ na A^* :

$$w \sim_{\mathcal{A}} v \iff \hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}(q_0, v).$$

Relacja ta ma skończony indeks. Używamy faktu powyżej, by dowieść

$$w \sim_{\mathcal{A}} v \implies w \sim_L v.$$

Czyli indeks relacji $\sim_L$ jest nie większy niż indeks relacji $\sim_{\mathcal{A}}$.

Wniosek

Każdy automat deterministyczny rozpoznający język L ma przynajmniej indeks($\sim_L$) stanów.

Dowód ($\sim_L$ ma skończony indeks $\implies L$ regularny)

Konstruujemy automat deterministyczny $\mathcal{A}_L$ (*automat syntaktyczny*):

- $Q' = A^*/\sim_L = \{ [w]_{\sim_L} : w \in A^* \}$
- $q'_0 = [\varepsilon]_{\sim_L}$
- $F' = \{ [w]_{\sim_L} : w \in L \}$
- $\delta'([w]_{\sim_L}, a) = [w a]_{\sim_L}$

Fakt ($\sim_L$ jest prawą kongruencją)

$$w \sim_L v \implies w a \sim_L v a$$

Dowód:

$$(w a)^{-1}L = a^{-1}(w^{-1}L) = a^{-1}(v^{-1}L) = (v a)^{-1}L$$

Fakt

$$L(\mathcal{A}_L) = L$$

Dowód:

$$w \in L(\mathcal{A}_L) \iff \hat{\delta}'(q'_0, w) \in F' \iff [w]_{\sim_L} \in F' \iff w \in L$$

Konstruujemy automat deterministyczny $\mathcal{A}_L$ (*automat syntaktyczny*):

- $Q' = \{ w^{-1}L : w \in A^* \}$
- $q'_0 = L = \varepsilon^{-1}L$
- $F' = \{ M \in Q' : \varepsilon \in M \}$
- $\delta'(M, a) = a^{-1}M$

Fakt

$$\widehat{\delta}'(q'_0, w) = w^{-1}L$$

Dowód:

$$a^{-1}(w^{-1}L) = (wa)^{-1}L$$

Fakt

$$L(\mathcal{A}_L) = L$$

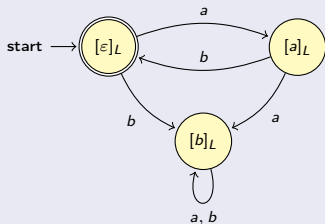
Dowód:

$$w \in L(\mathcal{A}_L) \iff \widehat{\delta}'(q'_0, w) \in F' \iff \varepsilon \in w^{-1}L \iff w \in L$$

- $Q' = A^*/\sim_L = \{[w]_{\sim_L} : w \in A^*\}$
- $q'_0 = [\varepsilon]_{\sim_L}$
- $F' = \{[w]_{\sim_L} : w \in L\}$
- $\delta'([w]_{\sim_L}, a) = [w a]_{\sim_L}$
- $Q' = \{w^{-1}L : w \in A^*\}$
- $q'_0 = L = \varepsilon^{-1}L$
- $F' = \{M \in Q' : \varepsilon \in M\}$
- $\delta'(M, a) = a^{-1}M$

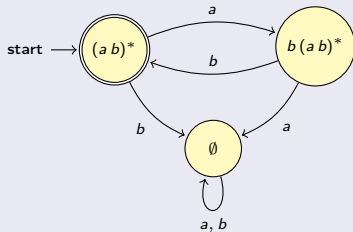
Przykład

$L = (a b)^*$



Przykład

$L = (a b)^*$



Wniosek

Każdy automat deterministyczny rozpoznający L ma przynajmniej $\text{indeks}(\sim_L)$ stanów.

Automat $\mathcal{A}_L$ ma $\text{indeks}(\sim_L)$ stanów.

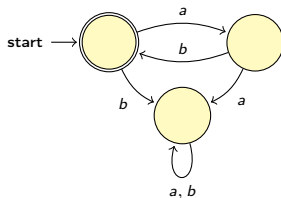
*Czyli $\mathcal{A}_L$ to **minimalny** automat deterministyczny rozpoznający język L .*

Pytanie

Czy automat minimalny jest wyznaczony jednoznacznie?

Dowodzenie minimalności (przykład)

Czy ten automat jest minimalny?



Tak!

Każdy automat deterministyczny rozpoznający $L = (ab)^*$ ma przynajmniej 3 stany.

Dowód:

	ε	a	b
ε	$\times$	b	ab
a	$\times$	$\times$	b
b	$\times$	$\times$	$\times$

$\varepsilon b \notin L$ $ab \in L$

$\varepsilon ab \in L$ $bab \notin L$

$ab \in L$ $bb \notin L$

- 1 Języki regularne mają skończenie wiele ilorazów lewostronnych
- 2 Minimalizacja automatów deterministycznych
- 3 *Minimalizacja automatów niedeterministycznych?

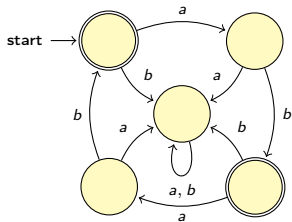
Kongruencja

Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny.

Kongruencja w $\mathcal{A}$ to relacja równoważności $R \subseteq Q \times Q$ taka, że

$$R(q, p) \implies (q \in F \iff p \in F)$$

$$R(q, p) \implies R(\delta(q, a), \delta(p, a)), \quad \text{dla każdego } a \in A.$$

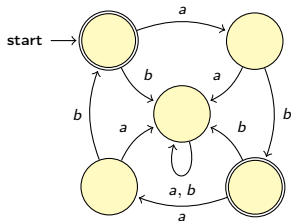


Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny.

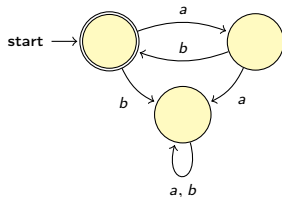
Kongruencja w $\mathcal{A}$ to relacja równoważności $R \subseteq Q \times Q$ taka, że

$$R(q, p) \implies (q \in F \iff p \in F)$$

$$R(q, p) \implies R(\delta(q, a), \delta(p, a)), \quad \text{dla każdego } a \in A.$$



$\mapsto$



Automat ilorazowy $\mathcal{A}/R$:

- $A' = A$
- $Q' = Q/R = \{[q]_R : q \in Q\}$
- $q'_0 = [q_0]_R$
- $F' = F/R = \{[q]_R : q \in F\}$
- $\delta'([q]_R, a) = [\delta(q, a)]_R$

Fakt

$$L(\mathcal{A}/R) = L(\mathcal{A})$$

Dowód:

$$\widehat{\delta'}([q_0]_R, w) = [\widehat{\delta}(q_0, w)]_R$$

Automat minimalny jako automat ilorazowy

Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny. Niech $L = L(\mathcal{A})$.
Założmy, że wszystkie stany automatu $\mathcal{A}$ są osiągalne.

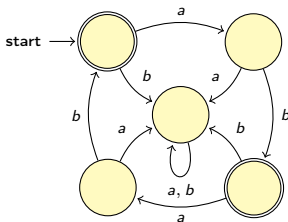
Definiujemy kongruencję w $\mathcal{A}$ następująco:

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \text{ wtw. gdy } L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$$

Czy to jest kongruencja? Należy sprawdzić:

$$L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A}) \implies (q \in F \iff p \in F)$$

$$L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A}) \implies L_{\delta(q,a)}(\mathcal{A}) = L_{\delta(p,a)}(\mathcal{A}), \quad \text{dla każdego } a \in A.$$



Niech $\mathcal{A} = (A, Q, \{q_0\}, F, \delta)$ automat deterministyczny. Niech $L = L(\mathcal{A})$.
Założmy, że wszystkie stany automatu $\mathcal{A}$ są osiągalne.

Definiujemy kongruencję w $\mathcal{A}$ następująco:

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \text{ wtw. gdy } L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$$

Fakt

Automaty $\mathcal{A}/\equiv_{\mathcal{A}}$ i $\mathcal{A}_L$ są izomorficzne.

Dowód:

- | | |
|---|---|
| • $Q' = \{L_q(\mathcal{A}) : q \in Q\}$ | • $Q' = \{w^{-1}L : w \in A^*\}$ |
| • $q'_0 = L_{q_0}(\mathcal{A})$ | • $q'_0 = L = \varepsilon^{-1}L$ |
| • $F' = \{L_q(\mathcal{A}) : q \in F\}$ | • $F' = \{M \in Q' : \varepsilon \in M\}$ |
| • $\delta'(L_q(\mathcal{A}), a) = L_{\delta(q,a)}(\mathcal{A})$ | • $\delta'(M, a) = a^{-1}M$ |

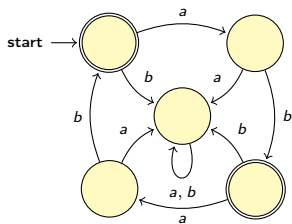
Użyjmy faktu:

$$L_{\widehat{\delta}(q_0, w)}(\mathcal{A}) = w^{-1}L, \quad \text{dla każdego } w \in A^*.$$

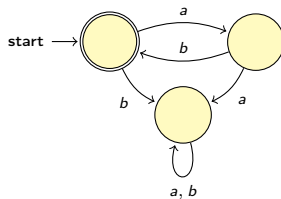
Wniosek

Automat *minimalny* $\mathcal{A}_L$ jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu).

$$L = (ab)^*$$



$\mapsto$



Problem obliczeniowy

Dane wejściowe: automat deterministyczny $\mathcal{A}$

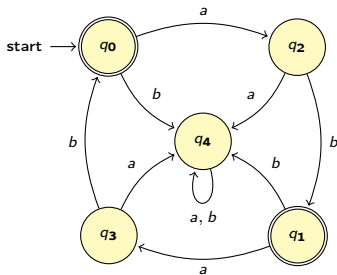
Wynik: automat (izomorficzny do automatu) $\mathcal{A}_L$

Algorytm minimalizacji

- usuń stany nieosiągalne z automatu $\mathcal{A}$
- oblicz relację $\equiv_{\mathcal{A}}$ $q \equiv_{\mathcal{A}} p$ wtw. gdy $L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$
- oblicz automat ilorazowy $\mathcal{A}/\equiv_{\mathcal{A}}$

Jak obliczyć relację $\equiv_{\mathcal{A}}$?

$q \equiv_{\mathcal{A}} p$ wtw. gdy $L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0			x	x	x
q_1			x	x	x
q_2	x	x			
q_3	x	x			
q_4	x	x	x		

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0			x	x	x
q_1			x	x	x
q_2	x	x			x
q_3	x	x			x
q_4	x	x	x	x	

Początkowa równoważność:

$$q \equiv_0 p \iff (q \in F \iff p \in F)$$

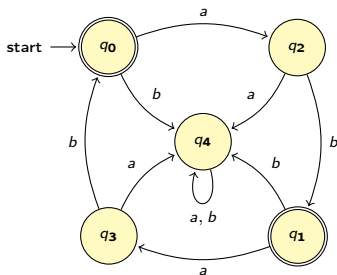
Uszczegółowienie:

$$q \equiv_{n+1} p \iff q \equiv_n p \wedge \forall a \in A \delta(q, a) \equiv_n \delta(p, a)$$

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \iff \forall n \ q \equiv_n p$$

Jak obliczyć relację $\equiv_{\mathcal{A}}$? (prościej)

$q \equiv_{\mathcal{A}} p$ wtw. gdy $L_q(\mathcal{A}) = L_p(\mathcal{A})$



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0			×	×	×
q_1			×	×	×
q_2	×	×			
q_3	×	×			
q_4	×	×	×		

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0			×	×	×
q_1			×	×	×
q_2	×	×			×
q_3	×	×			×
q_4	×	×	×	×	

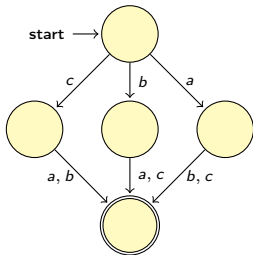
Skonstruuj graf:

wierzchołki: Q^2

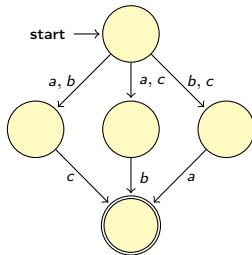
krawędzie: $(q, p) \rightarrow (\delta(q, a), \delta(p, a))$

$q \equiv_{\mathcal{A}} p \iff$ nie ma ścieżki z wierzchołka (q, p) do $F \times (Q - F) \cup (Q - F) \times F$

- $\mathcal{A} \mapsto R(\mathcal{A})$



$$L(R(\mathcal{A})) = L(\mathcal{A})^R$$



- $\mathcal{A} \mapsto P(\mathcal{A})$ konstrukcja podzbiorowa

- $\mathcal{A} \mapsto P(R(P(R(\mathcal{A}))))$

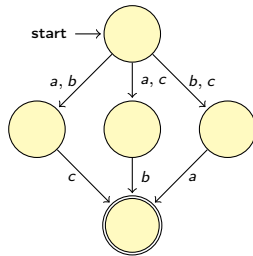
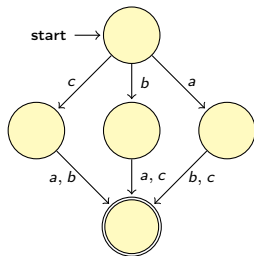
$$P(\underbrace{R(P(R(\mathcal{A})))}_{\text{ko-deterministyczny automat } \mathcal{A}'})$$

języki $L_q(\mathcal{A}')$ stanowią podział A^*

$P(\mathcal{A}')$ jest minimalny

- 1 Języki regularne mają skończenie wiele ilorazów lewostronnych
- 2 Minimalizacja automatów deterministycznych
- 3 *Minimalizacja automatów niedeterministycznych?

Brak jednoznaczności:



Należy rozszerzyć relację $\equiv_{\mathcal{A}}$ do automatów niedeterministycznych $\mathcal{A}$

$$q \equiv_{\mathcal{A}} p \iff \forall n \ q \equiv_n p$$

Dla automatów deterministycznych:

$$\begin{aligned} q \equiv_0 p &\iff (q \in F \iff p \in F) \\ q \equiv_{n+1} p &\iff q \equiv_n p \quad \wedge \quad \forall a \in A \ \delta(q, a) \equiv_n \delta(p, a) \end{aligned}$$

Dla automatów niedeterministycznych:

$$\begin{aligned} q \equiv_0 p &\iff (q \in F \iff p \in F) \\ q \equiv_{n+1} p &\iff q \equiv_n p \quad \wedge \quad \forall a \in A \\ &\quad \forall q' \ \delta(q, a, q') \implies \exists p' \ \delta(p, a, p') \wedge q' \equiv_n p' \\ &\quad \forall p' \ \delta(p, a, p') \implies \exists q' \ \delta(q, a, q') \wedge q' \equiv_n p' \end{aligned}$$

$q \equiv_{\mathcal{A}} p \iff$ Duplikator ma strategię wygrywającą
w grze bisymulacyjnej z pozycji (q, p)

Gra bisymulacyjna

Dwaj gracze **Spoiler** i **Duplikator**, gra rozgrywana w rundach. Runda rozpoczyna się w pozycji $(q, p) \in Q^2$ i przebiega następująco:

- Jeśli $\neg(q \in F \iff p \in F)$, wygrywa natychmiast **Spoiler**.
- **Spoiler** wybiera p lub q (powiedzmy q), literę $a \in A$ i stan q' taki, że

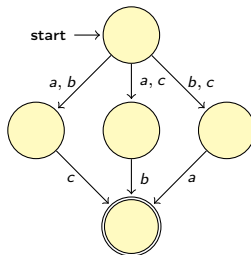
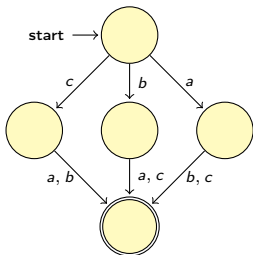
$$\delta(q, a, q');$$

- w odpowiedzi **Duplikator** wybiera stan p' taki, że

$$\delta(p, a, p')$$

i kolejna runda zaczyna się w pozycji (q', p') .

Kto nie może wykonać ruchu, natychmiast przegrywa. Rozgrywkę nieskończoną wygrywa zawsze **Duplikator**.



W następnym odcinku: wykraczamy poza języki regularne

