

Języki, automaty i obliczenia

Wykład 2: Automaty

Sławomir Lasota

Uniwersytet Warszawski

5 marca 2025



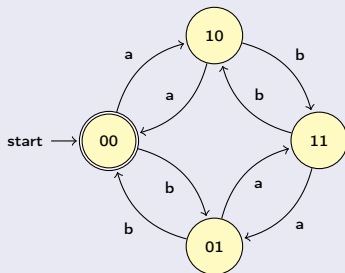
1 Automaty

2 Determinizacja

3 Operacje na językach

$$L = (aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^*$$

Przykład



$$\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$$

- A – alfabet
- Q – *skończony* zbiór stanów
- $I \subseteq Q$ – stany początkowe
- $F \subseteq Q$ – stany akceptujące
- $\delta \subseteq Q \times A \times Q$ – relacja przejścia

Notacja

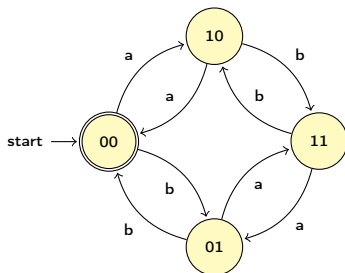
trójkę $(q, a, q') \in \delta$ nazywamy *przejściem* albo *tranzycją*

zamiast $(q, a, q') \in \delta$ możemy pisać $q \xrightarrow{a} \mathcal{A} q'$ albo $q \xrightarrow{a} q'$

Automat jest *deterministyczny* jeśli

- I zawiera jeden stan, $I = \{q_0\}$,
- δ jest funkcją $Q \times A \rightarrow Q$.

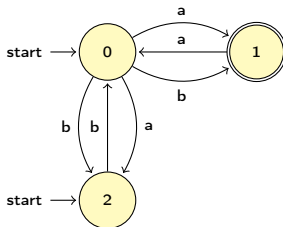
Przykład: czy ten automat jest deterministyczny?



$$\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$$

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{00, 01, 10, 11\}$
- $I = \{00\},$
- $F = \{00\}$
- $\delta = \{(00, a, 10), (10, a, 00), (00, b, 01), (01, b, 00), (01, a, 11), (11, a, 01), (10, b, 11), (11, b, 10)\}$

Przykład: automat niedeterministyczny

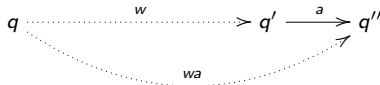


$$\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$$

- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{0, 1, 2\}$
- $I = \{0, 2\}$
- $F = \{1\}$
- $\delta = \{(0, a, 1), (0, b, 1), (0, a, 2), (0, b, 2), (1, a, 0), (2, b, 0)\}$

Rozszerzamy relację przejścia do relacji $\hat{\delta} \subseteq Q \times A^* \times Q$:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon, q)$
- jeśli $\hat{\delta}(q, w, q')$ i $\delta(q', a, q'')$ to $\hat{\delta}(q, wa, q'')$



Notacja

zamiast $(q, w, q') \in \hat{\delta}$ możemy pisać $q \xrightarrow{w} q'$

Dla automatów deterministycznych $\hat{\delta} : Q \times A^* \rightarrow Q$.

Stany osiągalne:

$$\{ q \in Q : \exists q_0 \in I, w \in A^*. q_0 \xrightarrow{w} q \}$$

Bieg (obliczenie) automatu na słowie $w = a_1 a_2 \dots a_n$ to ciąg stanów $q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ taki, że:

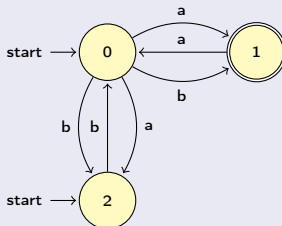
$$q_0 \in I \quad (q_0, a_1, q_1), (q_1, a_2, q_2), \dots, (q_{n-1}, a_n, q_n) \in \delta$$

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \dots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$

Bieg jest **akceptujący** jeśli $q_n \in F$.

Pytanie

Ile biegów na słowie ba ma ten automat? Czy ma bieg na każdym słowie?



Fakt

Automat deterministyczny ma dokładnie jeden bieg na każdym słowie.

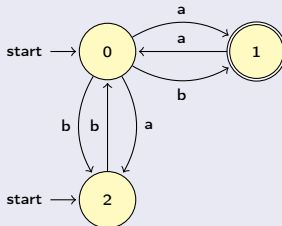
Automat jest *jednoznaczny* jeśli ma co najwyżej jeden bieg akceptujący na każdym słowie.

Fakt

Automat deterministyczny ma dokładnie jeden bieg na każdym słowie, więc jest jednoznaczny.

Pytanie

Czy ten automat jest jednoznaczny?



Język *rozpoznawany* przez automat:

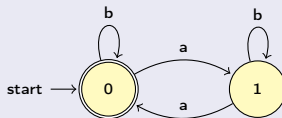
- $L(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ w \in A^* : \exists q \in I, q' \in F. q \xrightarrow{w} q' \}$
- $L(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ w \in A^* : \mathcal{A} \text{ ma bieg akceptujący na } w \}$
- $L(\mathcal{A}, q) \stackrel{\text{def}}{=} \dots$

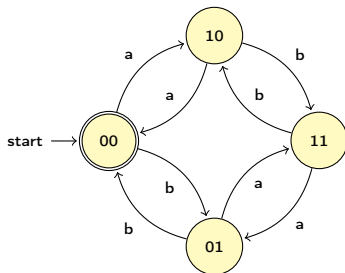
Dla automatów deterministycznych:

- $L(\mathcal{A}) = \{ w \in A^* : \widehat{\delta}(q_0, w) \in F \}$

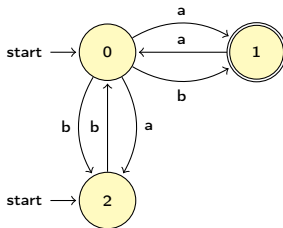
Przykład

$$L(\mathcal{A}) = b^*(ab^*ab^*)^*$$



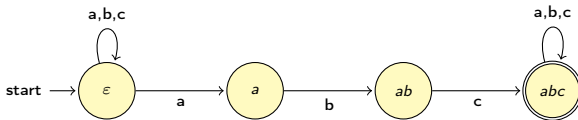


$L(\mathcal{A}) = ?$

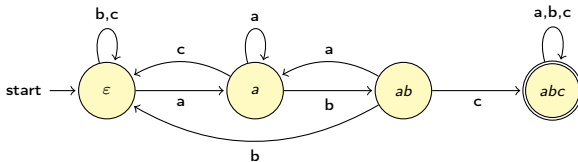


$L(\mathcal{A}) = ?$

- $A = \{a, b, c\}$
- $L(\mathcal{A}) = A^*abcA^*$
- automat niedeterministyczny:



- automat deterministyczny:



$L(\mathcal{A})$ = liczby podzielne przez 3

- $A = \{0, 1, \dots, 9\}$
- $Q = \{0, 1, 2\}$
- $I = \{0\}$,
- $F = \{0\}$
- $\delta(q, a) = (q + a) \bmod 3$

$L(\mathcal{A}) = (\text{liczby podzielne przez } 3) - \{\varepsilon\}$

- $Q = \{0, 1, 2, \text{początek}\}$
- $I = \{\text{początek}\}$
- $\delta(\text{początek}, a) = a \bmod 3$

$L(\mathcal{A})$ = wszystkie rozgrywki szachowe zakończone matem

- A = wszystkie ruchy w szachach
- $Q = (\text{wszystkie ustawienia figur na planszy szachowej}) \times \{\text{białe, czarne}\} \cup \{\perp\}$
- $I = \{(\text{ustawienie początkowe, białe})\}$
- $F = \{\text{ustawienia szach-mat}\} \times \{\text{białe, czarne}\}$
- $\delta((u, \text{białe}), r) = \begin{cases} (\text{wykonaj}(u, r), \text{czarne}) & \text{jeśli } r \text{ wykonalny z } (u, \text{białe}) \\ \perp & \text{w.p.p.} \end{cases}$
- $\delta((u, \text{czarne}), r) = \begin{cases} (\text{wykonaj}(u, r), \text{białe}) & \text{jeśli } r \text{ wykonalny z } (u, \text{czarne}) \\ \perp & \text{w.p.p.} \end{cases}$
- $\delta(\perp, r) = \perp$

1 Automaty

2 **Determinizacja**

3 Operacje na językach

Równoważność automatów:

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Pytanie

Czy dla każdego automatu niedeterministycznego istnieje równoważny automat deterministyczny?

Twierdzenie

Dla każdego automatu niedeterministycznego istnieje równoważny automat deterministyczny.

Dowód:

- $Q' := \mathcal{P}(Q)$
- $I' := \{I\}$
- $F' := \{X \subseteq Q : X \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(X, a) := \{\bar{q} \in Q : \exists q \in X. \delta(q, a, \bar{q})\}$

Przez indukcję po długości w pokazujemy:

$$\hat{\delta}'(I, w) = \{\bar{q} \in Q : \exists q \in I. \hat{\delta}(q, w, \bar{q})\}$$

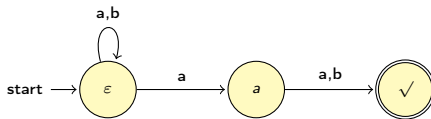
Zatem

$$\begin{aligned} w \in L(\mathcal{A}') &\iff \hat{\delta}'(I, w) \in F' \iff (\hat{\delta}'(I, w) \cap F) \neq \emptyset \iff \\ &\iff \exists q \in I, \bar{q} \in F. \hat{\delta}(q, w, \bar{q}) \iff w \in L(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

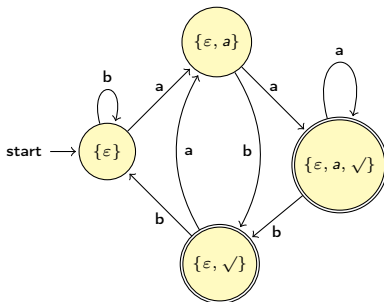
$$A = \{a, b\}$$

$$L = A^*aA$$

- automat niedeterministyczny (ale jednoznaczny):



- automat deterministyczny:

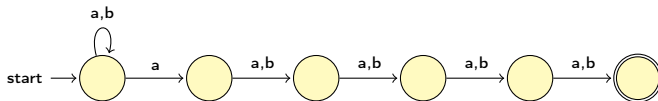


- a gdzie pozostałe 4 stany?

$$A = \{a, b\}$$

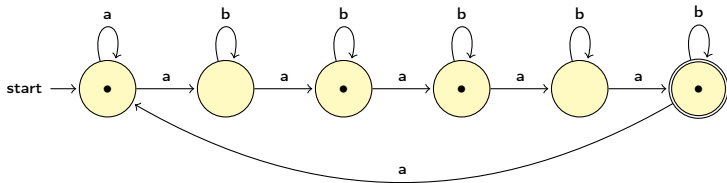
$$L_n = A^* a A^{n-2} \quad n \geq 2$$

Automat niedeterministyczny (ale jednoznaczny):



Pytanie

Ile stanów ma automat deterministyczny?



Pytanie

Ile stanów ma automat deterministyczny?

1 Automaty

2 Determinizacja

3 Operacje na językach

Automaty $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ nad tym samym alfabetem A

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}' \mapsto \mathcal{A}'' \qquad L(\mathcal{A}'') = L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{A}')$$

- $Q'' := Q \cup Q'$ (zakładamy, że $Q \cap Q' = \emptyset$)
- $I'' := I \cup I'$
- $F'' := F \cup F'$
- $\delta'' := \delta \cup \delta'$

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}' \mapsto \mathcal{A}'' \qquad L(\mathcal{A}'') = L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}')$$

- $Q'' := Q \times Q'$
- $I'' := I \times I'$
- $F'' := F \times F'$
- $\delta'' := \{((q, q'), a, (p, p')) : (q, a, p) \in \delta, (q', a, p') \in \delta'\}$

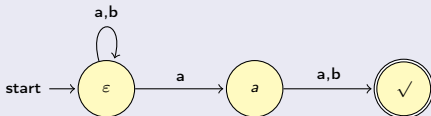
$$(q, q') \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}''} (p, p') \quad \text{wtw. gdy} \quad q \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} p \text{ i } q' \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}'} p'$$

$$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$$

$$L(\mathcal{B}) = A^* - L(\mathcal{A})$$

Pytanie

Czy wystarczy zamienić stany akceptujące z nieakceptującymi?

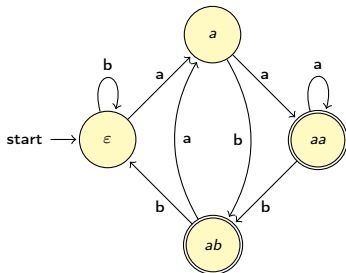


Krok 1: $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$ determinizacja

Krok 2: $\mathcal{A}' \mapsto \mathcal{B}$

zamiana stanów akceptujących z nieakc.

- $Q_{\mathcal{B}} := Q_{\mathcal{A}'}$
- $I_{\mathcal{B}} := I_{\mathcal{A}'}$
- $F_{\mathcal{B}} := Q_{\mathcal{A}'} - F_{\mathcal{A}'}$
- $\delta_{\mathcal{B}} := \delta_{\mathcal{A}'}$



Przykład

$$\text{las} \otimes \text{so} = \{\text{lasso}, \text{l}\underline{\text{s}}\text{aso}, \underline{\text{s}}\text{laso}, \text{lasos}, \text{l}\underline{\text{s}}\text{aos}, \underline{\text{s}}\text{laos}, \text{lsoas}, \underline{\text{s}}\text{loas}, \underline{\text{s}}\text{olas}\}$$

$$w \otimes v \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in A^* : \exists X \subseteq \{1 \dots |u|\}. u|_X = w, u|_{\{1 \dots |u|\} - X} = v\}$$

$$L \otimes M \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{w \in L, v \in M} w \otimes v$$

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}' \mapsto \mathcal{A}''$$

$$L(\mathcal{A}'') = L(\mathcal{A}) \otimes L(\mathcal{A}')$$

- $Q'' := Q \times Q'$
- $I'' := I \times I'$
- $F'' := F \times F'$

$$(q, q') \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}''} (p, p') \quad \text{wtw. gdy} \quad q \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} p \text{ i } q' = p', \quad \text{lub} \\ q' \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}'} p' \text{ i } q = p$$

$(aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^*$

