

# Całkowa krzywizna Mengera dla zbiorów dowolnego wymiaru i kowymiaru

Sławomir Kolasiński

Instytut Matematyki  
Uniwersytet Warszawski

8 maja 2012 r.

# Krzywizna Menger'a i energie krzywiznowe

## Definicja (Menger 1930)

Krzywizna Menger'a trójki punktów  $x, y$  i  $z$  w  $\mathbb{R}^n$  dana jest wzorem

$$c(x, y, z) := R(x, y, z)^{-1} = \frac{4\mathcal{H}^2(\Delta(x, y, z))}{|x - y||y - z||z - x|}.$$

# Krzywizna Menger'a i energie krzywiznowe

## Definicja (Menger 1930)

Krzywizna Menger'a trójki punktów  $x, y$  i  $z$  w  $\mathbb{R}^n$  dana jest wzorem

$$c(x, y, z) := R(x, y, z)^{-1} = \frac{4\mathcal{H}^2(\Delta(x, y, z))}{|x - y||y - z||z - x|}.$$

## Definicja (Gonzalez i Maddocks 1999; Melnikow 1995)

Niech  $\gamma = \Gamma(S^1)$ , gdzie  $\Gamma \in \text{Lip}(S^1, \mathbb{R}^n)$ . Definiujemy energie krzywiznowe

$$\Delta[\gamma]^{-1} := \sup\{c(x, y, z) : x, y, z \in \gamma\},$$

$$\mathcal{U}_p(\gamma) := \int_{\gamma} \sup\{c(x, y, z)^p : y, z \in \gamma\} d\mathcal{H}^1(x),$$

$$\mathcal{S}_p(\gamma) := \iint_{\gamma \times \gamma} \sup\{c(x, y, z)^p : z \in \gamma\} d\mathcal{H}^2(x, y),$$

$$\mathcal{M}_p(\gamma) := \iiint_{\gamma \times \gamma \times \gamma} c(x, y, z)^p d\mathcal{H}^3(x, y, z).$$



- możliwość zdefiniowania krzywizny niegładkich krzywych w przestrzeni Euklidesowej lub krzywizny łuków metrycznych (tj. podzbiorów homeomorficznych z odcinkiem  $[0, 1]$ ) w przestrzeniach metrycznych;

- możliwość zdefiniowania krzywizny niegładkich krzywych w przestrzeni Euklidesowej lub krzywizny łuków metrycznych (tj. podzbiorów homeomorficznych z odcinkiem  $[0, 1]$ ) w przestrzeniach metrycznych;
- geometryczna charakteryzacja usuwalnych zbiorów  $E \subseteq \mathbb{C}$  dla ograniczonych funkcji analitycznych  $f : \mathbb{C} \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ ;

- możliwość zdefiniowania krzywizny niegładkich krzywych w przestrzeni Euklidesowej lub krzywizny łuków metrycznych (tj. podzbiorów homeomorficznych z odcinkiem  $[0, 1]$ ) w przestrzeniach metrycznych;
- geometryczna charakteryzacja usuwalnych zbiorów  $E \subseteq \mathbb{C}$  dla ograniczonych funkcji analitycznych  $f : \mathbb{C} \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ ;
- znajdowanie „optymalnych kształtów” obiektów modelowanych jako jednowymiarowe krzywe w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  (np. nici DNA, polimery, białka itp.) - zagadnienia wariacyjne z więzami topologicznymi.

# Geometryczne twierdzenia o zanurzeniu

Odpowiedniki włożenia  $W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \subseteq C^{1,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$  dla  $p > n$ .

$$\Delta[\gamma]^{-1} < \infty \Rightarrow \gamma \in C^{1,1}$$

Gonzalez, Maddocks, Schuricht  
i von der Mosel 2002,

$$p > 1, \mathcal{U}_p(\gamma) < \infty \Rightarrow \gamma \in C^{1,1-1/p}$$

Strzelecki i von der Mosel 2007,

$$p > 2, \mathcal{S}_p(\gamma) < \infty \Rightarrow \gamma \in C^{1,1-2/p}$$

Strzelecki, Szumańska  
i von der Mosel 2009,

$$p > 3, \mathcal{M}_p(\gamma) < \infty \Rightarrow \gamma \in C^{1,1-3/p}$$

Strzelecki, Szumańska  
i von der Mosel 2010.



# Węzły o idealnym kształcie

Energie krzywiznowe pozwalają rozwiązywać zagadnienia wariacyjne z więzami topologicznymi. Niech  $\tilde{\gamma} \subseteq \mathbb{R}^3$  będzie ustalonym węzłem.

# Węzły o idealnym kształcie

Energie krzywiznowe pozwalają rozwiązywać zagadnienia wariacyjne z więzami topologicznymi. Niech  $\tilde{\gamma} \subseteq \mathbb{R}^3$  będzie ustalonym węzłem.

- [Gonzalez i in. 2002] w zbiorze wszystkich krzywych  $\gamma \in C^{1,1}$ , izotopijnych z  $\tilde{\gamma}$  i spełniających  $\Delta[\gamma]^{-1} < K$ , istnieje krzywa o najmniejszej długości;

# Węzły o idealnym kształcie

Energie krzywiznowe pozwalają rozwiązywać zagadnienia wariacyjne z więzami topologicznymi. Niech  $\tilde{\gamma} \subseteq \mathbb{R}^3$  będzie ustalonym węzłem.

- [Gonzalez i in. 2002] w zbiorze wszystkich krzywych  $\gamma \in C^{1,1}$ , izotopijnych z  $\tilde{\gamma}$  i spełniających  $\Delta[\gamma]^{-1} < K$ , istnieje krzywa o najmniejszej długości;
- [Strzelecki i in. 2007] w zbiorze wszystkich krzywych  $\gamma \in C^1$ , izotopijnych z  $\tilde{\gamma}$  i spełniających  $\mathcal{U}_p(\gamma) < K$  dla ustalonego  $p > 1$ , istnieje krzywa o najmniejszej energii  $\mathcal{U}_p$ ;

Energie krzywiznowe pozwalają rozwiązywać zagadnienia wariacyjne z więzami topologicznymi. Niech  $\tilde{\gamma} \subseteq \mathbb{R}^3$  będzie ustalonym węzłem.

- [Gonzalez i in. 2002] w zbiorze wszystkich krzywych  $\gamma \in C^{1,1}$ , izotopijnych z  $\tilde{\gamma}$  i spełniających  $\Delta[\gamma]^{-1} < K$ , istnieje krzywa o najmniejszej długości;
- [Strzelecki i in. 2007] w zbiorze wszystkich krzywych  $\gamma \in C^1$ , izotopijnych z  $\tilde{\gamma}$  i spełniających  $\mathcal{U}_p(\gamma) < K$  dla ustalonego  $p > 1$ , istnieje krzywa o najmniejszej energii  $\mathcal{U}_p$ ;
- [Strzelecki i in. 2009] w zbiorze wszystkich krzywych  $\gamma \in C^1$ , izotopijnych z  $\tilde{\gamma}$  i spełniających  $\mathcal{S}_p(\gamma) < K$  dla ustalonego  $p > 2$ , istnieje krzywa o najmniejszej energii  $\mathcal{S}_p$ ;

## Definicja (Strzelecki i von der Mosel)

$$\mathcal{K}_{2D}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\mathcal{H}^3(\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3))}{\mathcal{H}^2(\partial \Delta(x_0, x_1, x_2, x_3)) \operatorname{diam}(x_0, x_1, x_2, x_3)^2}$$

$$\text{oraz } \mathcal{M}_p^{2D}(\Sigma) = \int_{\Sigma^4} \mathcal{K}_{2D}(x_0, x_1, x_2, x_3)^p d\mathcal{H}^8(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

## Definicja (Strzelecki i von der Mosel)

$$\mathcal{K}_{2D}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\mathcal{H}^3(\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3))}{\mathcal{H}^2(\partial \Delta(x_0, x_1, x_2, x_3)) \operatorname{diam}(x_0, x_1, x_2, x_3)^2}$$

$$\text{oraz } \mathcal{M}_p^{2D}(\Sigma) = \int_{\Sigma^4} \mathcal{K}_{2D}(x_0, x_1, x_2, x_3)^p d\mathcal{H}^8(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

## Twierdzenie

Niech  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  będzie zamkniętą, spójną, lipschitzowską powierzchnią. Jeśli  $\mathcal{M}_p^{2D}(\Sigma) \leq E$  dla pewnego  $p > 8$ , to  $\Sigma \in C^{1,1-8/p}$ .

## Definicja (Strzelecki i von der Mosel)

$$\mathcal{K}_{2D}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\mathcal{H}^3(\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3))}{\mathcal{H}^2(\partial \Delta(x_0, x_1, x_2, x_3)) \operatorname{diam}(x_0, x_1, x_2, x_3)^2}$$

oraz  $\mathcal{M}_p^{2D}(\Sigma) = \int_{\Sigma^4} \mathcal{K}_{2D}(x_0, x_1, x_2, x_3)^p d\mathcal{H}^8(x_0, x_1, x_2, x_3).$

## Twierdzenie

Niech  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  będzie zamkniętą, spójną, lipschitzowską powierzchnią. Jeśli  $\mathcal{M}_p^{2D}(\Sigma) \leq E$  dla pewnego  $p > 8$ , to  $\Sigma \in C^{1,1-8/p}$ .

## Twierdzenie

Niech  $\mathcal{C}_g$  będzie zbiorem wszystkich zamkniętych, spójnych, lipschitzowskich powierzchni  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  o ustalonym genusie  $g$ . Wówczas

- w zbiorze  $\{\Sigma \in \mathcal{C}_g : \mathcal{H}^2(\Sigma) \leq A\}$  istnieje powierzchnia o najmniejszej energii  $\mathcal{M}_p^{2D}$ ;

## Definicja (Strzelecki i von der Mosel)

$$\mathcal{K}_{2D}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\mathcal{H}^3(\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3))}{\mathcal{H}^2(\partial \Delta(x_0, x_1, x_2, x_3)) \operatorname{diam}(x_0, x_1, x_2, x_3)^2}$$

$$\text{oraz } \mathcal{M}_p^{2D}(\Sigma) = \int_{\Sigma^4} \mathcal{K}_{2D}(x_0, x_1, x_2, x_3)^p d\mathcal{H}^8(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

## Twierdzenie

Niech  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  będzie zamkniętą, spójną, lipschitzowską powierzchnią. Jeśli  $\mathcal{M}_p^{2D}(\Sigma) \leq E$  dla pewnego  $p > 8$ , to  $\Sigma \in C^{1,1-8/p}$ .

## Twierdzenie

Niech  $\mathcal{C}_g$  będzie zbiorem wszystkich zamkniętych, spójnych, lipschitzowskich powierzchni  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  o ustalonym genusie  $g$ . Wówczas

- w zbiorze  $\{\Sigma \in \mathcal{C}_g : \mathcal{H}^2(\Sigma) \leq A\}$  istnieje powierzchnia o najmniejszej energii  $\mathcal{M}_p^{2D}$ ;
- w zbiorze  $\{\Sigma \in \mathcal{C}_g : \mathcal{M}_p^{2D}(\Sigma) \leq E\}$  istnieje powierzchnia o najmniejszym polu powierzchni.



# Propozycja wyżej wymiarowej energii krzywiznowej

## Definicja (K.)

$$\mathcal{K}(x_0, \dots, x_{m+1}) = \frac{\mathcal{H}^{m+1}(\Delta(x_0, \dots, x_{m+1}))}{\text{diam}(x_0, \dots, x_{m+1})^{m+2}}.$$

Dla  $l \in \{1, 2, \dots, m+1\}$  kładziemy

$$\mathcal{E}_p^l(\Sigma) = \int_{\Sigma^l} \sup_{x_l, \dots, x_{m+1} \in \Sigma} \mathcal{K}(x_0, \dots, x_{m+1})^p d\mathcal{H}^{m_l}(x_0, \dots, x_{l-1}),$$

oraz  $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^{m+2}(\Sigma) = \int_{\Sigma^{m+2}} \mathcal{K}(x_0, \dots, x_{m+1})^p d\mathcal{H}^{m(m+2)}(x_0, \dots, x_{m+1}).$

# Propozycja wyżej wymiarowej energii krzywiznowej

## Definicja (K.)

$$\mathcal{K}(x_0, \dots, x_{m+1}) = \frac{\mathcal{H}^{m+1}(\Delta(x_0, \dots, x_{m+1}))}{\text{diam}(x_0, \dots, x_{m+1})^{m+2}}.$$

Dla  $l \in \{1, 2, \dots, m+1\}$  kładziemy

$$\mathcal{E}_p^l(\Sigma) = \int_{\Sigma^l} \sup_{x_l, \dots, x_{m+1} \in \Sigma} \mathcal{K}(x_0, \dots, x_{m+1})^p d\mathcal{H}^{m_l}(x_0, \dots, x_{l-1}),$$

oraz  $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^{m+2}(\Sigma) = \int_{\Sigma^{m+2}} \mathcal{K}(x_0, \dots, x_{m+1})^p d\mathcal{H}^{m(m+2)}(x_0, \dots, x_{m+1}).$

Rozpatrujemy szeroką klasę  $\mathcal{F}(m)$  zwartych,  $m$ -wymiarowych podzbiorów  $\mathbb{R}^n$  zawierającą przykładowo

- 1 zamknięte, spójne, lipschitzowskie podzaimności  $\mathbb{R}^n$  wymiaru  $m \leq n$ ;
- 2 zbiory postaci  $\Sigma = \varphi(M)$ , gdzie  $M$  jest zamkniętą, spójną i gładką zaimnością wymiaru  $m \leq n$ , a  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest immersją klasy  $C^1$ ;
- 3 każdą skończoną sumę mnogościową powyższych zbiorów.

# Główne wyniki zawarte w rozprawie

## Twierdzenie

Jeśli  $\Sigma \in \mathcal{F}(m)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leq E < \infty$  dla pewnego  $p > m(m + 2)$ , to

# Główne wyniki zawarte w rozprawie

## Twierdzenie

Jeśli  $\Sigma \in \mathcal{F}(m)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leq E < \infty$  dla pewnego  $p > m(m+2)$ , to

- **[Geometryczne twierdzenie Morrey'a-Sobolewa]**  $\Sigma$  jest zanurzoną w  $\mathbb{R}^n$  rozmaitością klasy  $C^{1,1-m(m+2)/p}$ ;

# Główne wyniki zawarte w rozprawie

## Twierdzenie

Jeśli  $\Sigma \in \mathcal{F}(m)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leq E < \infty$  dla pewnego  $p > m(m+2)$ , to

- [Geometryczne twierdzenie Morrey'a-Sobolewa]  $\Sigma$  jest zanurzoną w  $\mathbb{R}^n$  rozmaitością klasy  $C^{1,1-m(m+2)/p}$ ;
- [Dolna regularność Ahlforsa] istnieją stałe  $R = R(E, m, p)$  oraz  $A = A(m)$  takie, że dla  $x \in \Sigma$  oraz  $r < R$  mamy

$$\mathcal{H}^m(\Sigma \cap \mathbb{B}(x, r)) \geq Ar^m;$$

# Główne wyniki zawarte w rozprawie

## Twierdzenie

Jeśli  $\Sigma \in \mathcal{F}(m)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leq E < \infty$  dla pewnego  $p > m(m+2)$ , to

- **[Geometryczne twierdzenie Morrey'a-Sobolewa]**  $\Sigma$  jest zanurzoną w  $\mathbb{R}^n$  rozmaitością klasy  $C^{1,1-m(m+2)/p}$ ;
- **[Dolna regularność Ahlforsa]** istnieją stałe  $R = R(E, m, p)$  oraz  $A = A(m)$  takie, że dla  $x \in \Sigma$  oraz  $r < R$  mamy

$$\mathcal{H}^m(\Sigma \cap \mathbb{B}(x, r)) \geq Ar^m;$$

- **[Kontrola lokalnych parametryzacji wykresami]** istnieją stałe  $R = R(E, m, p)$  oraz  $C = C(E, m, p)$  takie, że dla każdego  $x \in \Sigma$  istnieje funkcja  $f : T_x \Sigma \rightarrow (T_x \Sigma)^\perp$  klasy  $C^{1,1-m(m+2)/p}$  taka, że

$$\Sigma \cap \mathbb{B}(x, R) = \{(x, f(x)) : x \in T_x \Sigma\} \cap \mathbb{B}(x, R),$$

$$\text{oraz } \forall y, z \in T_x \Sigma \quad \|Df(y) - Df(z)\| \leq C|y - z|^{1-m(m+2)/p}.$$

## Twierdzenie (K., Szumańska)

Jeśli  $p > m(m + 1)$  i  $\alpha > 1 - \frac{m(m+1)}{p}$  oraz  $\Sigma$  jest zwartą rozmaitością klasy  $C^{1,\alpha}$ , to  $\mathcal{E}_p(\Sigma) < \infty$ . Ponadto istnieje zwarta rozmaitość  $\Sigma \in C^{1,1-m(m+1)/p}$  taka, że  $\mathcal{E}_p(\Sigma) = \infty$ .

# Twierdzenia zawarte w innych pracach

## Twierdzenie (K., Szumańska)

Jeśli  $p > m(m+1)$  i  $\alpha > 1 - \frac{m(m+1)}{p}$  oraz  $\Sigma$  jest zwartą rozmaitością klasy  $C^{1,\alpha}$ , to  $\mathcal{E}_p(\Sigma) < \infty$ . Ponadto istnieje zwarta rozmaitość  $\Sigma \in C^{1,1-m(m+1)/p}$  taka, że  $\mathcal{E}_p(\Sigma) = \infty$ .

## Twierdzenie (Blatt, K.)

Jeśli  $l \in \{2, \dots, m+2\}$ ,  $p > ml$ , a  $\Sigma$  jest zwartą rozmaitością klasy  $C^1$ , to  $\mathcal{E}_p^l(\Sigma) < \infty$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\Sigma \in W^{1+s,p}$ , gdzie  $s = 1 - \frac{m(m+1)}{p}$ .



# Twierdzenia zawarte w innych pracach

## Twierdzenie (K., Szumańska)

Jeśli  $p > m(m+1)$  i  $\alpha > 1 - \frac{m(m+1)}{p}$  oraz  $\Sigma$  jest zwartą rozmaitością klasy  $C^{1,\alpha}$ , to  $\mathcal{E}_p(\Sigma) < \infty$ . Ponadto istnieje zwarta rozmaitość  $\Sigma \in C^{1,1-m(m+1)/p}$  taka, że  $\mathcal{E}_p(\Sigma) = \infty$ .

## Twierdzenie (Blatt, K.)

Jeśli  $l \in \{2, \dots, m+2\}$ ,  $p > ml$ , a  $\Sigma$  jest zwartą rozmaitością klasy  $C^1$ , to  $\mathcal{E}_p^l(\Sigma) < \infty$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\Sigma \in W^{1+s,p}$ , gdzie  $s = 1 - \frac{m(m+1)}{p}$ .

## Twierdzenie (K., Strzelecki, von der Mosel)

Jeśli  $p > m$ , a  $\Sigma$  jest zwartą rozmaitością klasy  $C^1$ , to  $\mathcal{E}_p^1(\Sigma) < \infty$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\Sigma \in W^{2,p} \cap C^1$ .

# Twierdzenia zawarte w innych pracach

## Twierdzenie (K., Szumańska)

Jeśli  $p > m(m+1)$  i  $\alpha > 1 - \frac{m(m+1)}{p}$  oraz  $\Sigma$  jest zwartą rozmaitością klasy  $C^{1,\alpha}$ , to  $\mathcal{E}_p^1(\Sigma) < \infty$ . Ponadto istnieje zwarta rozmaitość  $\Sigma \in C^{1,1-m(m+1)/p}$  taka, że  $\mathcal{E}_p^1(\Sigma) = \infty$ .

## Twierdzenie (Blatt, K.)

Jeśli  $l \in \{2, \dots, m+2\}$ ,  $p > ml$ , a  $\Sigma$  jest zwartą rozmaitością klasy  $C^1$ , to  $\mathcal{E}_p^l(\Sigma) < \infty$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\Sigma \in W^{1+s,p}$ , gdzie  $s = 1 - \frac{m(m+1)}{p}$ .

## Twierdzenie (K., Strzelecki, von der Mosel)

Jeśli  $p > m$ , a  $\Sigma$  jest zwartą rozmaitością klasy  $C^1$ , to  $\mathcal{E}_p^1(\Sigma) < \infty$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\Sigma \in W^{2,p} \cap C^1$ .

## Hipoteza/Twierdzenie (K., Strzelecki, von der Mosel)

Zbiór wszystkich zamkniętych rozmaitości klasy  $C^1$  o wspólnie ograniczonej energii  $\mathcal{E}_p^1$  dla pewnego  $p > ml$ , jest ciągowo zwarty w topologii  $C^1$  i zawiera tylko skończoną liczbę parami niehomeomorficznych rozmaitości.

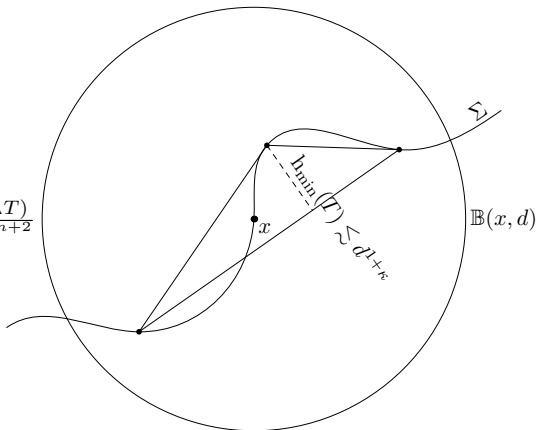
# Ogólna idea dowodu

- ❶ jeśli  $T \in \Sigma^{m+2}$  spełnia  $\mathbf{h}_{\min}(T) \geq \eta \operatorname{diam}(T)$  dla pewnego  $\eta \in (0, 1)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leq E$ , to istnieje  $\kappa = \kappa(m, p) \in (0, 1)$  takie, że

$$\eta \leq C(E, m, p, \Sigma) \operatorname{diam}(T)^\kappa ;$$

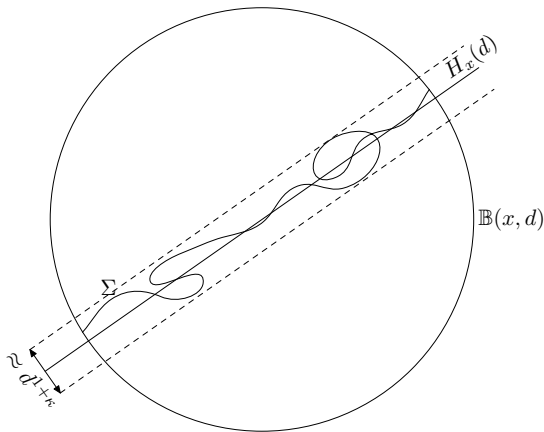
$$\mathcal{K}(T) = \frac{\mathcal{H}^{m+1}(\Delta T)}{\operatorname{diam}(T)^{m+2}}$$

$$\operatorname{diam}(T) \approx d$$



- 2 istnieje  $R_\Sigma > 0$  takie, że dla wszystkich  $x \in \Sigma$  oraz  $d < R_\Sigma$

$$\exists H_x(d) \in G(n, m) \quad \sup_{y \in \Sigma \cap \mathbb{B}(x, d)} \text{dist}(y, x + H_x(d)) \lesssim d^{1+\kappa};$$



# Ogólna idea dowodu

- 1 jeśli  $T \in \Sigma^{m+2}$  spełnia  $\mathbf{h}_{\min}(T) \geq \eta \mathbf{diam}(T)$  dla pewnego  $\eta \in (0, 1)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leq E$ , to istnieje  $\kappa = \kappa(m, p) \in (0, 1)$  takie, że

$$\eta \leq C(E, m, p, \Sigma) \mathbf{diam}(T)^\kappa;$$

- 2 istnieje  $R_\Sigma > 0$  takie, że dla wszystkich  $x \in \Sigma$  oraz  $d < R_\Sigma$

$$\exists H_x(d) \in G(n, m) \quad \sup_{y \in \Sigma \cap \mathbb{B}(x, d)} \mathbf{dist}(y, x + H_x(d)) \lesssim d^{1+\kappa};$$

- 3 dla  $x, y \in \Sigma$  takich, że  $|x - y| \leq \frac{d}{2}$  otrzymujemy

$$\angle(H_x(d), H_y(d)) \lesssim d^\kappa \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} H_x(d) \xrightarrow{d \rightarrow 0} T_x \Sigma \\ \text{oraz } \angle(T_x \Sigma, T_y \Sigma) \lesssim |x - y|^\kappa; \end{array}$$

- 1 jeśli  $T \in \Sigma^{m+2}$  spełnia  $\mathbf{h}_{\min}(T) \geq \eta \mathbf{diam}(T)$  dla pewnego  $\eta \in (0, 1)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leq E$ , to istnieje  $\kappa = \kappa(m, p) \in (0, 1)$  takie, że

$$\eta \leq C(E, m, p, \Sigma) \mathbf{diam}(T)^\kappa;$$

- 2 istnieje  $R_\Sigma > 0$  takie, że dla wszystkich  $x \in \Sigma$  oraz  $d < R_\Sigma$

$$\exists H_x(d) \in G(n, m) \quad \sup_{y \in \Sigma \cap \mathbb{B}(x, d)} \mathbf{dist}(y, x + H_x(d)) \lesssim d^{1+\kappa};$$

- 3 dla  $x, y \in \Sigma$  takich, że  $|x - y| \leq \frac{d}{2}$  otrzymujemy

$$\angle(H_x(d), H_y(d)) \lesssim d^\kappa \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} H_x(d) \xrightarrow{d \rightarrow 0} T_x \Sigma \\ \text{oraz } \angle(T_x \Sigma, T_y \Sigma) \lesssim |x - y|^\kappa; \end{array}$$

- 4 istnieje stała  $\eta_0 = \eta_0(m)$  taka, że jeśli  $\Sigma \in \mathcal{F}(m)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) < \infty$ , to dla każdego  $x_0 \in \Sigma$  istnieją  $x_1, \dots, x_{m+1} \in \Sigma$  takie, że  $T = (x_0, \dots, x_{m+1})$  spełnia  $\mathbf{h}_{\min}(T) \geq \eta_0 \mathbf{diam}(T)$ ;

- 1 jeśli  $T \in \Sigma^{m+2}$  spełnia  $\mathbf{h}_{\min}(T) \geq \eta \mathbf{diam}(T)$  dla pewnego  $\eta \in (0, 1)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) \leq E$ , to istnieje  $\kappa = \kappa(m, p) \in (0, 1)$  takie, że

$$\eta \leq C(E, m, p, \Sigma) \mathbf{diam}(T)^\kappa;$$

- 2 istnieje  $R_\Sigma > 0$  takie, że dla wszystkich  $x \in \Sigma$  oraz  $d < R_\Sigma$

$$\exists H_x(d) \in G(n, m) \quad \sup_{y \in \Sigma \cap \mathbb{B}(x, d)} \mathbf{dist}(y, x + H_x(d)) \lesssim d^{1+\kappa};$$

- 3 dla  $x, y \in \Sigma$  takich, że  $|x - y| \leq \frac{d}{2}$  otrzymujemy

$$\angle(H_x(d), H_y(d)) \lesssim d^\kappa \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} H_x(d) \xrightarrow{d \rightarrow 0} T_x \Sigma \\ \text{oraz } \angle(T_x \Sigma, T_y \Sigma) \lesssim |x - y|^\kappa; \end{array}$$

- 4 istnieje stała  $\eta_0 = \eta_0(m)$  taka, że jeśli  $\Sigma \in \mathcal{F}(m)$  oraz  $\mathcal{E}_p(\Sigma) < \infty$ , to dla każdego  $x_0 \in \Sigma$  istnieją  $x_1, \dots, x_{m+1} \in \Sigma$  takie, że  $T = (x_0, \dots, x_{m+1})$  spełnia  $\mathbf{h}_{\min}(T) \geq \eta_0 \mathbf{diam}(T)$ ;
- 5 metodami bootstrappingu i slicingu poprawiamy wykładnik  $\kappa$  do optymalnej wartości  $1 - \frac{m(m+2)}{p}$ .

Dziękuję za uwagę.