UNIVERSITY OF WARSAW

Regularność anizotropowej odległości od zbioru

Sławomir Kolasiński
s.kolasinski@mimuw.edu.pl

19 października 2021

$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładka i jednostajnie wypukła norma

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{gładka i jednostajnie wypukła norma}$$

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{zbiór domknięty}$$

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{gładka i jednostajnie wypukła norma}$$

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{zbiór domknięty}$$

$$\delta_K^\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{funkcja } \phi\text{-odległości od } K$$

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{gładka i jednostajnie wypukła norma}$$

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{zbiór domknięty}$$

$$\delta_K^\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{funkcja } \phi\text{-odległości od } K$$

$$\delta_K^\phi(x) = \inf\{\phi(y - x) : y \in K\}$$

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{gładka i jednostajnie wypukła norma}$$

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{zbiór domknięty}$$

$$\delta_K^\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{funkcja } \phi\text{-odległości od } K$$

$$\delta_K^\phi(x) = \inf\{\phi(y - x) : y \in K\}$$

$$\Sigma^\phi(K) = \mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^\phi)$$

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{gładka i jednostajnie wypukła norma}$$

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{zbiór domknięty}$$

$$\delta_K^\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{funkcja } \phi\text{-odległości od } K$$

$$\delta_K^\phi(x) = \inf\{\phi(y-x) : y \in K\}$$

$$\Sigma^\phi(K) = \mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^\phi)$$

$$x \in \operatorname{dmn} \operatorname{pt} \mathrm{D}^2 \delta_K^\phi \iff \exists P \text{ wielomian} \quad \lim_{y \to x} \frac{|\delta_K^\phi(y) - P(y)|}{|y-x|^2} = 0$$

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{gładka i jednostajnie wypukła norma}$$

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{zbiór domknięty}$$

$$\delta_K^\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{funkcja } \phi\text{-odległości od } K$$

$$\delta_K^\phi(x) = \inf\{\phi(y-x) : y \in K\}$$

$$\Sigma^\phi(K) = \mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^\phi)$$

$$x \in \operatorname{dmn} \operatorname{pt} \mathrm{D}^2 \delta_K^\phi \iff \exists P \text{ wielomian} \quad \lim_{y \to x} \frac{|\delta_K^\phi(y) - P(y)|}{|y-x|^2} = 0$$

$$\Sigma_2^\phi(K) = \mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{dmn} \operatorname{pt} \mathrm{D}^2 \delta_K^\phi)$$

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{gładka i jednostajnie wypukła norma}$$

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{zbiór domknięty}$$

$$\delta_K^\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{funkcja } \phi\text{-odległości od } K$$

$$\delta_K^\phi(x) = \inf\{\phi(y - x) : y \in K\}$$

$$\Sigma^\phi(K) = \mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^\phi)$$

$$x \in \operatorname{dmn} \operatorname{pt} \mathrm{D}^2 \delta_K^\phi \iff \exists P \text{ wielomian} \quad \lim_{y \to x} \frac{|\delta_K^\phi(y) - P(y)|}{|y - x|^2} = 0$$

$$\Sigma_2^\phi(K) = \mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{dmn} \operatorname{pt} \mathrm{D}^2 \delta_K^\phi)$$

Pytamy o strukturę zbiorów $\Sigma^\phi(K)$ oraz $\Sigma_2^\phi(K)$.

$$\phi^*(u) = \sup\{u \bullet v : \phi(v) = 1\}$$

$$\phi^*(u) = \sup\{u \bullet v : \phi(v) = 1\}$$

δ_K^ϕ jest półwklęsła (semiconcave) na $\mathbb{R}^n \sim K$
grad δ_K^ϕ ma ograniczone wahanie

$$\begin{cases} \phi^*(\operatorname{grad} \delta_K^\phi(x)) = 1 & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \sim K \\ \delta_K^\phi(x) = 0 & \text{dla } x \in K \end{cases}$$

Twierdzenie

Funkcja δ_K^ϕ jest klasy C^1, zaś $\operatorname{grad} \delta_K^\phi$ jest lokalnie Lipschitzowska na zbiorze otwartym $\mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{Clos} \Sigma^\phi(K))$.

cf. P.-L. Lions „Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations”, 1982

- Istnieje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty, wypukły z brzegiem klasy $C^{1,1}$ i taki, że $\operatorname{Clos} \Sigma^\phi(\mathbb{R}^n \sim \Omega)$ ma niepuste wnętrze.

cf. M. Santilli „Distance functions with dense singular sets”, 2021

- Istnieje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty, wypukły z brzegiem klasy $C^{1,1}$ i taki, że $\operatorname{Clos} \Sigma^\phi(\mathbb{R}^n \sim \Omega)$ ma niepuste wnętrze.
- Dla typowego, w sensie kategorii Baire'a, wypukłego otwartego $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ z brzegiem klasy C^1 zbiór $\Sigma^\phi(\mathbb{R}^n \sim \Omega)$ jest gęsty w Ω.

cf. M. Santilli „Distance functions with dense singular sets", 2021

- Istnieje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty, wypukły z brzegiem klasy $C^{1,1}$ i taki, że $\operatorname{Clos} \Sigma^{\phi}(\mathbb{R}^n \sim \Omega)$ ma niepuste wnętrze.
- Dla typowego, w sensie kategorii Baire'a, wypukłego otwartego $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ z brzegiem klasy C^1 zbiór $\Sigma^{\phi}(\mathbb{R}^n \sim \Omega)$ jest gęsty w Ω.
- Istnieje domknięta hiperpowierzchnia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ klasy $C^{1,\alpha}$ taka, że $\Sigma^{\phi}(K)$ jest gęsty w $\mathbb{R}^n$.

cf. M. Santilli „Distance functions with dense singular sets", 2021

- Istnieje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty, wypukły z brzegiem klasy $C^{1,1}$ i taki, że $\operatorname{Clos} \Sigma^\phi(\mathbb{R}^n \sim \Omega)$ ma niepuste wnętrze.
- Dla typowego, w sensie kategorii Baire'a, wypukłego otwartego $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ z brzegiem klasy C^1 zbiór $\Sigma^\phi(\mathbb{R}^n \sim \Omega)$ jest gęsty w Ω.
- Istnieje domknięta hiperpowierzchnia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ klasy $C^{1,\alpha}$ taka, że $\Sigma^\phi(K)$ jest gęsty w $\mathbb{R}^n$.

cf. M. Santilli „Distance functions with dense singular sets", 2021

Zbiór $\mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{Clos} \Sigma^\phi(K))$ może być pusty!

- $\Sigma^{\phi}(K)$ można pokryć, z dokładnością do zbioru miary $\mathscr{H}^{n-1}$ zero, przeliczalnie wieloma hiperpowierzchniami klasy C^2.

  cf. L. Zajíček „On the differentiation of convex functions …”, 1979

  cf. P. Hajłasz „On an old theorem of Erdös …”, 2021

- $\Sigma^{\phi}(K)$ można pokryć, z dokładnością do zbioru miary $\mathscr{H}^{n-1}$ zero, przeliczalnie wieloma hiperpowierzchniami klasy C^2.

  cf. L. Zajíček „On the differentiation of convex functions …”, 1979

  cf. P. Hajłasz „On an old theorem of Erdös …”, 2021
- $\mathscr{L}^n(\mathbb{R}^n \sim (K \cup \Sigma_2^{\phi}(K))) = 0$

  cf. A. D. Alexandrov „Almost everywhere existence …”, 1939

- $\Sigma^{\phi}(K)$ można pokryć, z dokładnością do zbioru miary $\mathscr{H}^{n-1}$ zero, przeliczalnie wieloma hiperpowierzchniami klasy C^2.

  cf. L. Zajíček „On the differentiation of convex functions ...", 1979

  cf. P. Hajłasz „On an old theorem of Erdös ...", 2021
- $\mathscr{L}^n(\mathbb{R}^n \sim (K \cup \Sigma_2^{\phi}(K))) = 0$

  cf. A. D. Alexandrov „Almost everywhere existence ...", 1939
- Niech

$$N^{\phi}(K) = \mathbb{R}^{2n} \cap \left\{ (a, \eta) : \begin{matrix} a \in K,\ \eta \in \mathbb{R}^n,\ \phi(\eta) = 1, \\ \exists s > 0 \quad \delta_K^{\phi}(a + s\eta) = s \end{matrix} \right\}.$$

  Wówczas jeśli K jest wypukły, to istnieje $Z \subseteq N^{\phi}(K)$ taki, że $\mathscr{H}^{n-1}(Z) = 0$ oraz

$$\Sigma_2^{\phi}(K) = \{a + r\eta : (a, \eta) \in Z,\ r > 0\}.$$

- $N^\phi(K)$ jest borelowski i przeliczalnie $(n-1)$-prostowalny.

- $N^{\phi}(K)$ jest borelowski i przeliczalnie $(n-1)$-prostowalny.
- Kładąc
$$\boldsymbol{\xi}_K^{\phi}(x) = K \cap \{y : \phi(y-x) = \delta_K^{\phi}(x)\}$$
mamy
$$\operatorname{grad} \delta_K^{\phi}(x) = \operatorname{grad} \phi(x - \boldsymbol{\xi}_K^{\phi}(x)) \quad \text{dla } x \in \operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^{\phi} .$$

- $N^{\phi}(K)$ jest borelowski i przeliczalnie $(n-1)$-prostowalny.
- Kładąc
$$\boldsymbol{\xi}_K^{\phi}(x) = K \cap \{y : \phi(y-x) = \delta_K^{\phi}(x)\}$$
mamy
$$\operatorname{grad} \delta_K^{\phi}(x) = \operatorname{grad} \phi(x - \boldsymbol{\xi}_K^{\phi}(x)) \quad \text{dla } x \in \operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^{\phi}\,.$$
- Definiując
$$\operatorname{Unp}^{\phi}(K) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \mathscr{H}^0(\boldsymbol{\xi}_{\phi}^{K}(x)) = 1\}$$
otrzymujemy
$$\Sigma^{\phi}(K) = \mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^{\phi}) = \operatorname{Unp}^{\phi}(K) \sim K\,.$$

- $N^{\phi}(K)$ jest borelowski i przeliczalnie $(n-1)$-prostowalny.
- Kładąc
$$\boldsymbol{\xi}_K^{\phi}(x) = K \cap \{y : \phi(y - x) = \delta_K^{\phi}(x)\}$$
mamy
$$\operatorname{grad} \delta_K^{\phi}(x) = \operatorname{grad} \phi(x - \boldsymbol{\xi}_K^{\phi}(x)) \quad \text{dla } x \in \operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^{\phi} .$$
- Definiując
$$\operatorname{Unp}^{\phi}(K) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \mathscr{H}^0(\boldsymbol{\xi}_{\phi}^{K}(x)) = 1\}$$
otrzymujemy
$$\Sigma^{\phi}(K) = \mathbb{R}^n \sim (K \cup \operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^{\phi}) = \operatorname{Unp}^{\phi}(K) \sim K .$$
- $\mathscr{L}^n(\mathbb{R}^n \sim \operatorname{Unp}^{\phi}(K)) = 0$ z tw. Rademachera.

$$\mathbf{r}_K^{\phi}(a,\eta) = \sup\{s : \delta_K^{\phi}(a+s\eta) = s\} \quad \text{dla } (a,\eta) \in N^{\phi}(K)$$

$$\mathbf{r}_K^\phi(a,\eta) = \sup\{s : \delta_K^\phi(a+s\eta) = s\} \quad \text{dla } (a,\eta) \in N^\phi(K)$$

Twierdzenie (M. Santilli, S.K. arXiv:2106.15955)

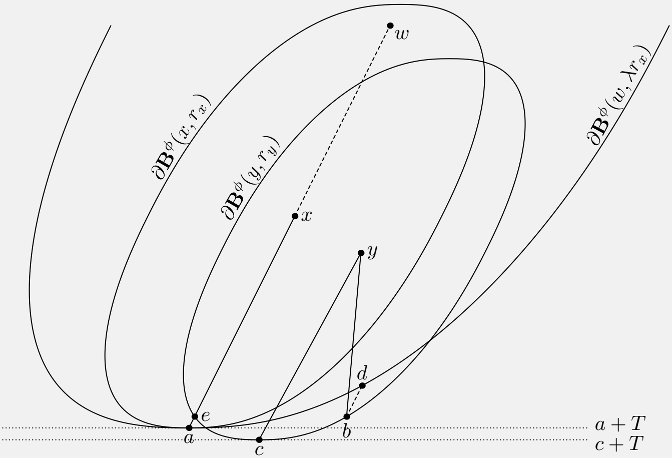
Niech $U = (\operatorname{dmn} \mathrm{D}\delta_K^\phi) \sim K$, $1 < \lambda < \infty$, $0 < s < t < \infty$,

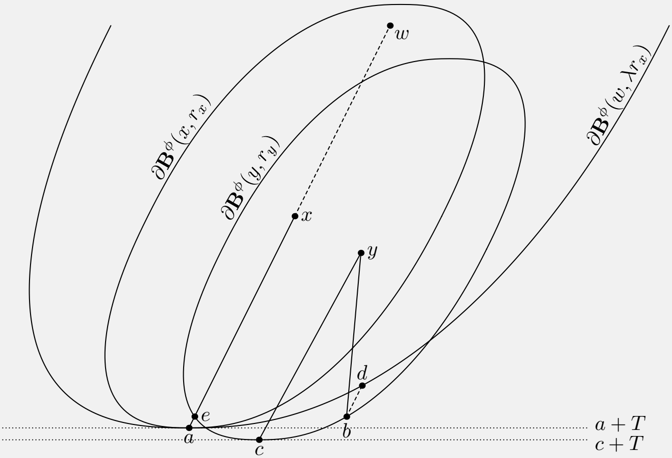
$$K_{\lambda,s,t} = \left\{a + \rho\eta : (a,\eta) \in N^\phi(K)\,, s \le \rho \le t\,, \lambda\rho \le \mathbf{r}_K^\phi(a,\eta)\right\}.$$

Wówczas istnieje $\Gamma = \Gamma(\lambda, s, t, \phi) \in \mathbb{R}$ *t.że*

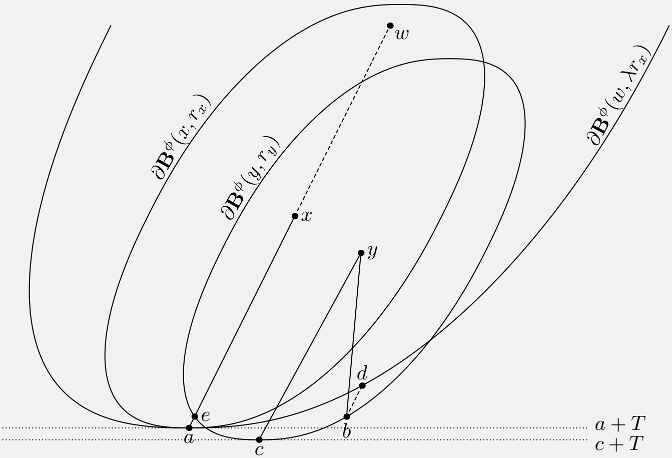
$$|\operatorname{grad} \delta_K^\phi(x) - \operatorname{grad} \delta_K^\phi(y)| \le \Gamma|x-y|$$

$$\text{o ile } x \in K_{\lambda,s,t},\, y \in U,\, \delta_K^\phi(y) \le t\,.$$

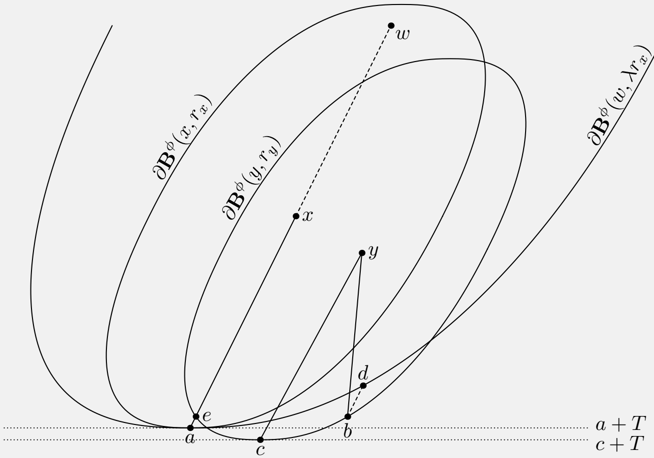

w
$\partial\mathbf{B}^{\phi}(x, r_x)$
$\partial\mathbf{B}^{\phi}(y, r_y)$
$\partial\mathbf{B}^{\phi}(w, \lambda r_x)$
x
y
d
e
a
b
c
$a + T$
$c + T$



$$q(b - c) \leq q(d - a) + q(e - c)$$



$$q(b-c) \le q(d-a) + q(e-c)$$
$$|T_\natural(b-c)|^2 \le \Delta_1 \lambda^{-1} |T_\natural(b-a)|^2 + \Delta_2 |T_\natural(a-c)|^2$$



$$q(b-c) \leq q(d-a) + q(e-c)$$
$$|T_\natural(b-c)|^2 \leq \Delta_1 \lambda^{-1} |T_\natural(b-a)|^2 + \Delta_2 |T_\natural(a-c)|^2$$
$$|T_\natural(b-a)| \leq |T_\natural(b-c)| + |T_\natural(c-a)| \leq$$
$$\Delta_3 |T_\natural(c-a)| + \lambda^{-1/2} \Delta_4 |T_\natural(b-a)|$$

$$\operatorname{Cut}^{\phi}(K) = \left\{ a + \mathbf{r}_K^{\phi}(a,\eta)\eta : (a,\eta) \in N^{\phi}(K) \right\}$$

$$\mathrm{Cut}^\phi(K) = \left\{ a + \mathbf{r}_K^\phi(a,\eta)\eta : (a,\eta) \in N^\phi(K) \right\}$$

$$\boldsymbol{\rho}_\phi^K(x) = \sup\left\{ s \geq 0 : \ \delta_K^\phi(a + s(x-a)) = s\delta_K^\phi(x) \right\}$$

$$\operatorname{Cut}^{\phi}(K) = \left\{ a + \mathbf{r}_K^{\phi}(a,\eta)\eta : (a,\eta) \in N^{\phi}(K) \right\}$$

$$\boldsymbol{\rho}_{\phi}^{K}(x) = \sup\left\{ s \geq 0 : \ \boldsymbol{\delta}_K^{\phi}(a + s(x-a)) = s\boldsymbol{\delta}_K^{\phi}(x) \right\}$$

$$\underline{\boldsymbol{\rho}_{\phi}^{K}}(x) = \operatorname{ap}\liminf_{y \to x} \boldsymbol{\rho}_{\phi}^{K}(y)\,, \quad \underline{\mathbf{r}_K^{\phi}}(a,\eta) = r\underline{\boldsymbol{\rho}_{\phi}^{K}}(a + r\eta)$$

$$\mathrm{Cut}^{\phi}(K) = \{a + \mathbf{r}^{\phi}_{K}(a,\eta)\eta : (a,\eta) \in N^{\phi}(K)\}$$

$$\boldsymbol{\rho}^{K}_{\phi}(x) = \sup\{s \geq 0 : \ \delta^{\phi}_{K}(a + s(x-a)) = s\delta^{\phi}_{K}(x)\}$$

$$\underline{\boldsymbol{\rho}^{K}_{\phi}}(x) = \operatorname{ap}\liminf_{y\to x} \boldsymbol{\rho}^{K}_{\phi}(y)\,, \quad \underline{\mathbf{r}^{\phi}_{K}}(a,\eta) = r\underline{\boldsymbol{\rho}^{K}_{\phi}}(a + r\eta)$$

Twierdzenie (M. Santilli, S.K. arXiv:2106.15955)

$$P = \{a + r\eta : (a,\eta) \in N^{\phi}(K),\ 0 < r < \underline{\mathbf{r}^{\phi}_{K}}(a,\eta)\}$$

$$Q = \{a + r\eta : (a,\eta) \in N^{\phi}(K),\ \underline{\mathbf{r}^{\phi}_{K}}(a,\eta) \leq r \leq \mathbf{r}^{\phi}_{K}(a,\eta)\}$$

Wówczas

1. $\mathrm{Cut}^{\phi}(K) \subseteq \Sigma^{\phi}_{2}(K)$,
2. $\mathscr{H}^{n-1}\big(N^{\phi}(K) \cap \{(a,\eta) : \underline{\mathbf{r}^{\phi}_{K}}(a,\eta) < \mathbf{r}^{\phi}_{K}(a,\eta)\}\big) = 0$,
3. $\mathscr{L}^{n}(Q) = 0$,
4. *istnieje* $Z \subseteq N^{\phi}(K)$ *t.że* $\mathscr{H}^{n-1}(Z) = 0$ *oraz*

$$P \cap \Sigma^{\phi}_{2}(K) = \{a + r\eta : (a,\eta) \in Z,\ 0 < r < \underline{\mathbf{r}^{\phi}_{K}}(a,\eta)\}.$$

Lemat (propagacja różniczkowalności wzdłuż włókien δ_K^ϕ)

Niech

$$(a, \eta) \in N^\phi(K)\,, \quad 0 < t < \underline{\mathbf{r}}_K^\phi(a, \eta)\,,$$
$$a + t\eta \in \mathbb{R}^n \sim \Sigma_2^\phi(K)\,.$$

Wówczas

$$\{a + s\eta : 0 < s < \underline{\mathbf{r}}_K^\phi(a, \eta)\} \subseteq \mathbb{R}^n \sim \Sigma_2^\phi(K)\,.$$

$$S^{\phi}(K,r) = \mathbb{R}^n \cap \left\{x : \delta_K^{\phi}(x) = r\right\}$$

$$S^\phi(K,r) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \delta_K^\phi(x) = r\}$$
$$K_\lambda = (\mathbb{R}^n \sim K) \cap \{x : \boldsymbol{\rho}_\phi^K(x) \geq \lambda\}, \quad \lambda > 1$$

$$S^{\phi}(K,r) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \delta_K^{\phi}(x) = r\}$$
$$K_\lambda = (\mathbb{R}^n \sim K) \cap \{x : \boldsymbol{\rho}_{\phi}^{K}(x) \geq \lambda\}, \quad \lambda > 1$$
$$f_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \quad f_t(a,\eta) = a + t\eta$$

$$S^{\phi}(K,r) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \delta_K^{\phi}(x) = r\}$$
$$K_\lambda = (\mathbb{R}^n \sim K) \cap \{x : \boldsymbol{\rho}_\phi^K(x) \geq \lambda\}, \quad \lambda > 1$$
$$f_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \quad f_t(a,\eta) = a + t\eta$$
$$g : \mathrm{Unp}^{\phi}(K) \to N^{\phi}(K), \quad g(x) = (\boldsymbol{\xi}_\phi^K(x), \boldsymbol{\nu}_K^{\phi}(x))$$

$$S^\phi(K,r) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \delta_K^\phi(x) = r\}$$
$$K_\lambda = (\mathbb{R}^n \sim K) \cap \{x : \boldsymbol{\rho}_\phi^K(x) \geq \lambda\}, \quad \lambda > 1$$
$$f_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \quad f_t(a,\eta) = a + t\eta$$
$$g : \mathrm{Unp}^\phi(K) \to N^\phi(K), \quad g(x) = (\boldsymbol{\xi}_\phi^K(x), \boldsymbol{\nu}_K^\phi(x))$$
$$\mathscr{L}^n(\Sigma_2^\phi(K)) = 0 \implies \mathscr{H}^{n-1}(\Sigma_2^\phi(K) \cap S^\phi(K,t)) = 0 \text{ p.w. } t > 0$$

$$S^\phi(K,r) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \delta_K^\phi(x) = r\}$$
$$K_\lambda = (\mathbb{R}^n \sim K) \cap \{x : \boldsymbol{\rho}_\phi^K(x) \geq \lambda\}, \quad \lambda > 1$$
$$f_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \quad f_t(a,\eta) = a + t\eta$$
$$g : \mathrm{Unp}^\phi(K) \to N^\phi(K), \quad g(x) = (\boldsymbol{\xi}_\phi^K(x), \boldsymbol{\nu}_K^\phi(x))$$
$$\mathscr{L}^n(\Sigma_2^\phi(K)) = 0 \implies \mathscr{H}^{n-1}(\Sigma_2^\phi(K) \cap S^\phi(K,t)) = 0 \text{ p.w. } t > 0$$
$$Z = N^\phi(K) \cap \{(a,\eta) : a + s\eta \in \Sigma_2^\phi(K) \text{ dla } 0 < s < \underline{\mathbf{r}_K^\phi}(a,\eta)\}$$

$$S^{\phi}(K,r) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \delta_K^{\phi}(x) = r\}$$
$$K_\lambda = (\mathbb{R}^n \sim K) \cap \{x : \boldsymbol{\rho}_{\phi}^{K}(x) \geq \lambda\}, \quad \lambda > 1$$
$$f_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \quad f_t(a,\eta) = a + t\eta$$
$$g : \mathrm{Unp}^{\phi}(K) \to N^{\phi}(K), \quad g(x) = (\boldsymbol{\xi}_{\phi}^{K}(x), \boldsymbol{\nu}_{K}^{\phi}(x))$$
$$\mathscr{L}^n(\Sigma_2^{\phi}(K)) = 0 \implies \mathscr{H}^{n-1}(\Sigma_2^{\phi}(K) \cap S^{\phi}(K,t)) = 0 \text{ p.w. } t > 0$$
$$Z = N^{\phi}(K) \cap \{(a,\eta) : a + s\eta \in \Sigma_2^{\phi}(K) \text{ dla } 0 < s < \underline{\mathbf{r}}_K^{\phi}(a,\eta)\}$$
$$Z_t = Z \cap \{(a,\eta) : t < \underline{\mathbf{r}}_K^{\phi}(a,\eta)\}, \quad f_t[Z_t] \subseteq \Sigma_2^{\phi}(K) \cap S(K,t)$$

$$S^\phi(K,r) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \delta_K^\phi(x) = r\}$$
$$K_\lambda = (\mathbb{R}^n \sim K) \cap \{x : \boldsymbol{\rho}_\phi^K(x) \geq \lambda\}, \quad \lambda > 1$$
$$f_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \quad f_t(a,\eta) = a + t\eta$$
$$g : \mathrm{Unp}^\phi(K) \to N^\phi(K), \quad g(x) = (\boldsymbol{\xi}_\phi^K(x), \boldsymbol{\nu}_K^\phi(x))$$
$$\mathscr{L}^n(\Sigma_2^\phi(K)) = 0 \implies \mathscr{H}^{n-1}(\Sigma_2^\phi(K) \cap S^\phi(K,t)) = 0 \text{ p.w. } t > 0$$
$$Z = N^\phi(K) \cap \{(a,\eta) : a + s\eta \in \Sigma_2^\phi(K) \text{ dla } 0 < s < \underline{\mathbf{r}}_K^\phi(a,\eta)\}$$
$$Z_t = Z \cap \{(a,\eta) : t < \underline{\mathbf{r}}_K^\phi(a,\eta)\}, \quad f_t[Z_t] \subseteq \Sigma_2^\phi(K) \cap S(K,t)$$
$$\mathscr{H}^{n-1}(f_t[Z_t]) = 0 \implies \mathscr{H}^{n-1}(g[K_\lambda \cap S(K,t)] \cap Z_t) = 0 \text{ p.w. } t$$

$$S^\phi(K,r) = \mathbb{R}^n \cap \{x : \delta_K^\phi(x) = r\}$$
$$K_\lambda = (\mathbb{R}^n \sim K) \cap \{x : \boldsymbol{\rho}_\phi^K(x) \geq \lambda\}, \quad \lambda > 1$$
$$f_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \quad f_t(a,\eta) = a + t\eta$$
$$g : \mathrm{Unp}^\phi(K) \to N^\phi(K), \quad g(x) = (\boldsymbol{\xi}_\phi^K(x), \boldsymbol{\nu}_K^\phi(x))$$
$$\mathscr{L}^n(\Sigma_2^\phi(K)) = 0 \implies \mathscr{H}^{n-1}(\Sigma_2^\phi(K) \cap S^\phi(K,t)) = 0 \text{ p.w. } t > 0$$
$$Z = N^\phi(K) \cap \{(a,\eta) : a + s\eta \in \Sigma_2^\phi(K) \text{ dla } 0 < s < \underline{\mathbf{r}}_K^\phi(a,\eta)\}$$
$$Z_t = Z \cap \{(a,\eta) : t < \underline{\mathbf{r}}_K^\phi(a,\eta)\}, \quad f_t[Z_t] \subseteq \Sigma_2^\phi(K) \cap S(K,t)$$
$$\mathscr{H}^{n-1}(f_t[Z_t]) = 0 \implies \mathscr{H}^{n-1}(g[K_\lambda \cap S(K,t)] \cap Z_t) = 0 \text{ p.w. } t$$
$$\mathscr{H}^{n-1}(Z_t) = 0, \quad Z = \textstyle\bigcup_{t>0} Z_t, \quad \mathscr{H}^{n-1}(Z) = 0. \qquad \square$$

Dziękuję za uwagę.