Twierdzenie ([SG77, 2.6, Corollary 1] **O zbieżności monotonicznej**). *Jeśli $C > 0$, $\{f_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq L(X)$ jest niemalejącym ciągiem funkcji całkowalnych zbiegającym prawie wszędzie do funkcji f oraz $\int_X f_i \leqslant C$ dla $i \in \mathbb{N}$, to f jest całkowalna oraz*

$$\int_X f = \lim_{i\to\infty} \int_X f_i\,.$$

Twierdzenie ([SG77, 2.7, Theorem 3] **O zbieżności zmajoryzowanej**). *Jeśli $\{f_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq L(X)$ jest ciągiem funkcji całkowalnych zbiegającym prawie wszędzie do f oraz istnieje $g \in L(X)$ taka, że*

$$|f_i(x)| \leqslant g(x) \quad \text{dla } i \in \mathbb{N} \text{ oraz prawie wszystkich } x \in X\,,$$

to $f \in L(X)$ oraz $\lim_{i\to\infty} \int_X f_i = \int_X f$.

Twierdzenie ([SG77, 2.10, Theorem 5] **Fubiniego**). *Niech X, Y będą zbiorami zaś $W = X \times Y$. Załóżmy, że całki elementarne na X, Y i W określone są na przestrzeniach liniowych $H(X)$, $H(Y)$ i $H(W)$ oraz dla każdej $h \in H(W)$ zachodzi*

(a) $h_y \in L(X)$ dla prawie wszystkich $y \in Y$, gdzie $h_y(x) = h(x, y)$ dla $x \in X$;

(b) jeśli $f(y) = \int_X h(x, y)\,\mathrm{d}x$ dla $y \in Y$, to $f \in L(Y)$;

(c) $\int_W h\,\mathrm{d}(x, y) = \int_Y \int_X h(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Wówczas własności (a), (b), (c) zachodzą również dla każdej $h \in L(W)$.

Uwaga. Przy założeniach powyższego twierdzenie własności (a), (b), (c) zachodzą również dla każdej funkcji mierzalnej i nieujemnej, tzn. jeśli $h \geqslant 0$ i jest mierzalna (np. ciągła prawie wszędzie) to *nie trzeba wiedzieć a priori*, że $\int_W h < \infty$.

---

1. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f_n(x, y) = \exp(-n|x^2 - y|)$. Udowodnij, że ciąg f_n zbiega prawie wszędzie do funkcji zerowej.

2. Niech $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą dane wzorem

$$f_n(x, y) = \exp\left(\sin^n(x) + \sqrt[n]{|\sin(y/n)|}\right)\,.$$

   Udowodnij, że ciąg f_n jest zbieżny prawie wszędzie i znajdź jego granicę.

3. Niech $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $f(0) = 1$. Czy f jest sumowalna na $\mathbb{R}$?

4. Podaj przykład ciągu funkcji sumowalnych $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ takiego, że f_n zbiega prawie wszędzie do pewnej funkcji sumowalnej $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ oraz

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x < \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

5. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{2 + \sin^n(x^2)}{1 + x^2}\,.$$

   Wykaż, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

   istnieje i znajdź jej wartość.

6. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem
$$f_n(x,y) = \sin^n(y-x)\exp(-x^2-3y^2)\,.$$
Wykaż, że granica
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{(x,y):x^2+2y^2<n^2\}} f_n(z)\,\mathrm{d}z$$
istnieje i znajdź jej wartość.

7. [Egzamin 2011/2012] Wykaż, że granica
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-2\pi n}^{2\pi n} \left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\exp(-2x^2)\,\mathrm{d}x$$
istnieje i znajdź jej wartość.

8. Niech $y_n \in [0,1]$ będzie dowolnym ciągiem. Czy funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{|x-y_n|}}$$
jest całkowalna na $[0,1]$?

9. Oblicz następujące granice:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \exp(-\cos^n(x))\,\mathrm{d}x\,,\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} n(\exp(x/n)-1)\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty} x^{-3} n\ln(1+x/n)\,\mathrm{d}x\,.$$

10. Zbadaj istnienie i skończoność poniższej granicy.
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n} n(\exp(x/n)-1)\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,.$$

11. [Egzamin 2018/2019] Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4\cdot 2!}+\frac{x^3}{8\cdot 3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2^{2n}\cdot(2n)!}\right)(x+\sin^n(x))e^{-2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

12. [Egzamin 2018/2019] Niech $A_n = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0,\ (3+\frac{1}{n})x+y \leqslant 2+\frac{1}{5n}\}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Oblicz
$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} e^{-x/n}(x^4+y+y^n e^{-n})\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

13. [Nierówność Czebyszewa] Niech $\int_X$ będzie całką na X. Definiujemy *miarę* μ wzorem $\mu(A) = \int_X \chi_A(x)\,\mathrm{d}x$ dla $A\subseteq X$ takich, że $\chi_A \in L(X)$. Niech $f\in L(X)$. Pokaż, że
$$\mu(\{x\in X : f(x)>t\}) \leqslant \frac{1}{t}\int f\,\mathrm{d}\mu\,.$$
Wywnioskuj, że jeśli $\mu(X)<\infty$ oraz $K\in(0,\infty)$, to
$$\mu\big(\{x\in X : f(x) > K\mu(X)^{-1}\textstyle\int f\,\mathrm{d}\mu\}\big) \leqslant \frac{\mu(X)}{K}\,.$$

Literatura

[SG77] G. E. Shilov and B. L. Gurevich. *Integral, measure and derivative: a unified approach.* Dover Publications, Inc., New York, english edition, 1977. Translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Dover Books on Advanced Mathematics.