Niech X będzie dowolnym zbiorem zaś H będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, której elementami są ograniczone funkcje typu $X \to \mathbb{R}$ oraz dla każdej $h \in H$ zachodzi $|h| \in H$.

Definicja ([SG77, 2.1])**.** Funkcję liniową $I : H \to \mathbb{R}$ nazwiemy *całką elementarną* jeśli spełnia

1. $Ih \geqslant 0$ dla każdej nieujemnej funkcji $h \in H$.
2. Jeśli $h_i \in H$ dla $i \in \mathbb{N}$, $h_i(x) \geqslant h_{i+1}(x)$ dla $i \in N$ i $x \in X$ oraz $\lim_{i\to\infty} h_i(x) = 0$ dla $x \in X$, to $\lim_{i\to\infty} Ih_i = 0$.

Definicja ([SG77, 2.2])**.** Zbiór $Z \subseteq X$ nazwiemy *zbiorem miary zero* jeśli jest pusty lub dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje niemalejący ciąg nieujemnych funkcji $\{h_i \in H : i \in \mathbb{N}\}$ taki, że $Ih_i < \varepsilon$ oraz

$$\sup\{h_i(x) : i \in \mathbb{N}\} \geqslant 1 \quad \text{dla } x \in Z\,.$$

Przykład. Niech $X = \mathbb{R}^n$, a H zawiera wszystkie funkcje schodkowe typu $f = \sum_{i\in I} c_i\chi_{A_i}$, gdzie $\{A_i : i \in I\}$ jest skończonym zbiorem rozłącznych przedziałów n-wymiarowych. Całkę elementarną z f można wówczas zdefiniować jako $If = \sum_{i\in I} c_i m(A_i)$, gdzie $m(A_i)$ jest iloczynem długości boków przedziału A_i. Zbiór $E \subseteq \mathbb{R}^n$ jest miary zero wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina A przedziałów n-wymiarowych taka, że $\sum_{B\in A} m(B) < \varepsilon$ oraz $E \subseteq \bigcup A$.

Uwaga. W poniższych zadaniach jeśli $X = \mathbb{R}^n$, to zakładamy, że H oraz I są zdefiniowane jak w przykładzie powyżej.

Definicja. Mówimy, że ciąg f_i zbiega *prawie wszędzie* do f jeśli $X \setminus \{x : \lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)\}$ jest miary zero.
Będziemy pisać $f_i \nearrow f$ jeśli f_i zbiega prawie wszędzie do f oraz $f_i(x) \leqslant f_{i+1}(x)$ dla $i \in \mathbb{N}$ i prawie wszystkich $x \in X$.

Definicja ([SG77, 2.3, 2.5])**.** Klasa $L^+(X)$ składa się ze wszystkich funkcji $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dla których istnieje ciąg $h_i \in H$ taki, że $h_i \nearrow f$ oraz $\sup\{Ih_i : i \in \mathbb{N}\} < \infty$.
Całkę elementarną $I : H \to \mathbb{R}$ rozszerzamy do $I : L^+(X) \to \mathbb{R}$ wzorem $If = \lim_{i\to\infty} Ih_i$ o ile $f \in L^+(X)$ oraz $h_i \in H$ spełnia $h_i \nearrow f$.
Przestrzeń liniowa funkcji *sumowalnych* $L(X)$ składa się ze wszystkich funkcji postaci $h = f - g$, gdzie $f, g \in L^+(X)$. Funkcję $I : L^+(X) \to \mathbb{R}$ rozszerzamy do funkcji liniowej $I : L(X) \to \mathbb{R}$ wzorem $Ih = If - Ig$ jeśli $f, g \in L^+(X)$ oraz $h = f - g$. Wprowadzamy notację

$$\int_X f(x)\mathrm{d}x = If \quad \text{dla } f \in L(X)\,.$$

Definicja ([SG77, 2.8.1])**.** Funkcję $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nazwiemy *mierzalną* jeśli istnieje ciąg funkcji $\{f_i \in H : i \in \mathbb{N}\}$ który zbiega prawie wszędzie do f.

Twierdzenie ([SG77, 2.6, Corollary 1] **O zbieżności monotonicznej**)**.** *Jeśli $C > 0$, $f_i \in L(X)$, $f_i \nearrow f$ oraz $If_i \leqslant C$ dla $i \in \mathbb{N}$, to $f \in L(X)$ oraz*

$$If = \lim_{i\to\infty} If_i\,.$$

Twierdzenie ([SG77, 2.7, Theorem 3] **O zbieżności zmajoryzowanej**)**.** *Jeśli $f_i \in L(X)$ zbiega prawie wszędzie do f oraz istnieje $g \in L(X)$ taka, że*

$$|f_i(x)| \leqslant g(x) \quad \textit{dla } i \in \mathbb{N} \textit{ oraz prawie wszystkich } x \in X\,,$$

to $f \in L(X)$ oraz $\lim_{i\to\infty} If_i = If$.

[Zobacz również [Fed69, 2.5.1 - 2.5.6].]

1. Pokaż, że $f \in L(X)$ wtedy i tylko wtedy gdy $|f| \in L(X)$.
2. Pokaż, że przeliczalna suma zbiorów miary zero jest miary zero.
3. Pokaż, że w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zbiór $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ jest miary zero wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina A przedziałów n-wymiarowych taka, że $Z \subseteq \bigcup A$ oraz $\sum_{B \in A} m(B) < \varepsilon$.
4. Niech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ będzie ciągła. Pokaż, że wykres f jest zbiorem miary zero.
5. Udowodnij, że $I : L(X) \to \mathbb{R}$ jest *przeliczalnie addytywna*, tzn. $I(\sum_{i=1}^{\infty} f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} If_i$ o ile $f_i \in L(X)$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in L(X)$.
6. Niech $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathbb{R}^n$ oraz $g(x) = f(x+u)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że $g \in L(\mathbb{R}^n)$ oraz $Ig = If$.
7. Niech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ będzie mierzalna, zaś $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : x \in \mathbb{R}^k\}$ będzie wykresem f. Pokaż, że funkcja charakterystyczna G jest mierzalna. Wywnioskuj, że G jest miary zero.

   Wskazówka. Dla $u \in \mathbb{R}^{n-k}$ połóżmy $f_u(x) = f(x) + u$ dla $x \in \mathbb{R}^k$. Jeśli $u, v \in \mathbb{R}^{n-k}$ oraz $u \neq v$, to wykresy f_u i f_v są rozłączne.
8. Pokaż, że każda rozmaitość M w $\mathbb{R}^n$ wymiaru $d < n$ jest zbiorem miary zero.
9. Pokaż, że klasyczny zbiór Cantora jest miary zero.
10. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, a $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy C^1. Pokaż, że jeśli $A \subseteq \Omega$ jest miary zero, to $\varphi[A]$ też jest miary zero.
11. Niech $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Pokaż, że A jest miary zero. Pokaż, że jeśli A pokryjemy *skończoną* liczbą przedziałów to suma ich długości wynosi co najmniej 1.
12. Pokaż, że zbiory $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}\}$ oraz $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in Q\}$ są miary zero.
13. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie monotoniczna. Udowodnij, że f jest mierzalna.
14. Udowodnij, że poniższe funkcje są mierzalne.
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lfloor x \rfloor}{1 + n^5 \lfloor x \rfloor^2}$$
$$\text{oraz} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lfloor xy \rfloor}{1 + n^3 \lfloor x^2 + y^2 \rfloor}\,.$$
15. Niech $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Udowodnij, że f' jest funkcją mierzalną.
16. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f_n(x,y) = \exp(-n|x^2 - y|)$. Udowodnij, że ciąg f_n zbiega prawie wszędzie do funkcji zerowej.

17. Niech $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą dane wzorem
$$f_n(x,y) = \exp\left(\sin^n(x) + \sqrt[n]{|\sin(y/n)|}\right).$$
Udowodnij, że ciąg f_n jest zbieżny prawie wszędzie i znajdź jego granicę.

18. Niech $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $f(0) = 1$. Czy f jest sumowalna na $\mathbb{R}$?

19. Podaj przykład ciągu funkcji sumowalnych $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ takiego, że f_n zbiega prawie wszędzie do pewnej funkcji sumowalnej $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ oraz
$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x < \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\,.$$

20. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie mierzalna, zaś $g \in L(X)$ będzie taka, że $|f(x)| \leqslant g(x)$ dla prawie wszystkich $x \in X$. Pokaż, że wówczas $f \in L(X)$.

21. [Zbiory Borelowskie.] Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}^n$ powstałych przez zastosowanie przeliczalnie wielu operacji mnogościowych (suma, przecięcie, dopełnienie) na zbiorach otwartych. Pokaż, że funkcja charakterystyczna dowolnego $B \in \mathcal{B}$ jest funkcją mierzalną, a jeśli B jest ograniczony, to również sumowalną.

22. Niech $G \subseteq \mathbb{R}$ będzie otwarty i taki, że $G \subseteq [0,1]$. Funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x) = 1$ dla $x \in G$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in [0,1] \setminus G$. Pokaż, że $f \in L^+([0,1])$.

23. Skonstruuj zbiór otwarty $G \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $G \subseteq [0,1]$, zaś funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dana przez $f(x) = 0$ dla $x \in G$ oraz $f(x) = 1$ dla $x \in [0,1] \setminus G$ nie jest elementem $L^+([0,1])$.
[Oczywiście $f \in L([0,1])$.]

Wskazówka. Niech G będzie sumą przedziałów (α_i, β_i) dla $i \in \mathbb{N}$ takich, że $\sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i - \alpha_i < 1$ oraz $\overline{G} = [0,1]$.

24. [Funkcja niemierzalna.] Na prostej $\mathbb{R}$ wprowadzamy relację równoważności: $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy gdy $x - y \in \mathbb{Q}$. Każda klasa równoważności jest równoliczna z $\mathbb{Q}$, a zatem przeliczalna, więc klas równoważności musi być nieprzeliczalnie wiele. Z każdej klasy równoważności $k \in \mathbb{R}/_\sim$ wybierzmy dokładnie jednego reprezentanta $x_k \in [0,1)$. Definiujemy $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ tak, że dla $k \in \mathbb{R}/_\sim$ kładziemy $f(x_k) = 1$ oraz $f(y) = 0$ jeśli $y \sim x_k$, $y \neq x_k$ oraz $y \in [0,1)$. Przedłużamy f do $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kładąc $f(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1)$. Teraz f jest 1-okresowa. Pokaż, że f nie jest mierzalna.

Wskazówka. Z 1-okresowości mamy $\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x+h)\mathrm{d}x$ dla $h \in \mathbb{R}$. Z konstrukcji wynika również, że $\sum_{r\in\mathbb{Q}} f(x+r) = 1$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Literatura

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. URL: `https://doi.org/10.1007/978-3-642-62010-2`,

[SG77] G. E. Shilov and B. L. Gurevich. *Integral, measure and derivative: a unified approach.* Dover Publications, Inc., New York, english edition, 1977. Translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Dover Books on Advanced Mathematics.