Definicja. Niech $1 \leqslant n \leqslant m$ będą liczbami naturalnymi. Przekształcenie $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazwiemy *izometrycznym włożeniem* jeśli α jest liniowe i spełnia

$$\langle \alpha(u),\, \alpha(v) \rangle = \langle u,\, v \rangle \quad \text{dla } u, v \in \mathbb{R}^n \,.$$

Uwaga. Jeśli $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest izometrycznym włożeniem, to $\pi = \alpha \circ \alpha^\top$ jest rzutem ortogonalnym w $\mathbb{R}^m$ na podprzestrzeń liniową $\operatorname{im} \alpha$.

Definicja. Niech $n \leqslant m$ będą liczbami naturalnymi, zaś $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie liniowym izometrycznym włożeniem. Zbiór $M \subseteq \mathbb{R}^m$ nazywamy *rozmaitością n-wymiarową klasy C^k* jeśli dla każdego $p \in M$ istnieją zbiory otwarte $G, H \subseteq \mathbb{R}^m$ oraz dyfeomorfizm $\Phi : G \to H$ klasy C^k takie, że

$$p \in H \quad \text{oraz} \quad M \cap H = \Phi[G \cap \operatorname{im} \alpha] \,.$$

Twierdzenie (cf. [Str16, Twierdzenia 3.28 i 3.30])**.** *Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ będzie otwarty, $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ będzie submersją, $M = F^{-1}\{0\}$, $p \in M$. Jeśli $g|_M$ ma ekstremum lokalne w p, to $\mathrm{d}g(p)u = 0$ dla $u \in T_pM$, czyli $\ker \mathrm{d}F(p) \subseteq \ker \mathrm{d}g(p) = \operatorname{lin}\{\nabla g(p)\}^\perp$ zatem istnieje wektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ taki, że $\mathrm{d}F(p)^\top \lambda = \nabla g(p)$.*[1] *W szczególności, jeśli $m = 1$, to $\nabla g(p) = \lambda \nabla F(p)$.*
Ponadto, jeśli g i F są klasy C^2 oraz $L = g - \langle \lambda, F \rangle$, to

- *jeśli $\mathrm{d}^2 L(p)|_{T_pM \times T_pM} > 0$ (< 0), to $g|_M$ ma właściwe minimum (maksimum) w p;*
- *jeśli $\mathrm{d}^2 L(p)(w, w) > 0 > \mathrm{d}^2 L(p)(v, v)$ dla pewnych $w, v \in T_pM$, to $g|_M$ nie ma ekstremum lokalnego w p.*

---

1. (Porównaj [Fed69, 3.1.19]) Niech $n, \mu, k \in \mathbb{N}$, $\mu, k \geqslant 1$, $\mu \leqslant n$, oraz $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne.

   (a) B jest rozmaitością wymiaru μ klasy C^k.

   (b) **[Prostowanie]** Dla każdego $b \in B$ istnieje otoczenie T punktu b w $\mathbb{R}^n$, dyfeomorfizm $\sigma : T \to \sigma[T] \subseteq \mathbb{R}^n$ klasy C^k oraz μ-wymiarowa podprzestrzeń liniowa Z w $\mathbb{R}^n$ takie, że
   $$\sigma[B \cap T] = Z \cap \operatorname{im} \sigma \,.$$

   (c) **[Poziomica]** Dla każdego $b \in B$ istnieje otoczenie T punktu b w $\mathbb{R}^n$ oraz przekształcenie $f : T \to \mathbb{R}^i$ klasy C^k, gdzie $i \geqslant n - \mu$, takie, że
   $$B \cap T = f^{-1}\{f(b)\} \,, \quad \dim \operatorname{im} \mathrm{d}f(x) = n - \mu \quad \text{dla } x \in T \,.$$

   (d) **[Parametryzacja]** Dla każdego $b \in B$ istnieje zbiór otwarty Q w $\mathbb{R}^m$, gdzie $m \geqslant \mu$, oraz funkcja $f : Q \to \mathbb{R}^n$ klasy C^k takie, że f przekształca każdy otwarty podzbiór Q na otwarty podzbiór w B oraz
   $$b \in \operatorname{im} f \,, \quad \dim \operatorname{im} \mathrm{d}f(x) = \mu \quad \text{dla } x \in Q \,.$$

   (e) **[Mapa]** Dla każdego $b \in B$ istnieje otoczenie T punktu b w $\mathbb{R}^n$, wypukły i otwarty podzbiór V w $\mathbb{R}^\mu$ oraz przekształcenia $\phi : T \to V$ i $\psi : V \to T$ klasy C^k takie, że
   $$B \cap T = \operatorname{im} \psi \,, \quad \phi \circ \psi = \mathrm{id}_V \,.$$

[1] Zauważ, że $\operatorname{im} \mathrm{d}F(p)^\top = \ker \mathrm{d}F(p)^\perp$.

(f) **[Wykres]** Dla każdego $b \in B$ istnieje otoczenie T punktu b w $\mathbb{R}^n$ oraz izometryczne włożenie $\alpha : \mathbb{R}^\mu \to \mathbb{R}^n$ takie, że kładąc $p = \alpha^\top$ mamy

$$p|_{B\cap T} \text{ jest różnowartościowe}, \quad p[B \cap T] = p[T] \text{ jest wypukły},$$
$$(p|_{B\cap T})^{-1} : p[T] \to \mathbb{R}^n \text{ jest klasy } C^k, \quad \mathrm{d}(p|_{B\cap T})^{-1}(p(b)) = \alpha\,.$$

2. Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1, a $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie rozmaitością klasy C^1. Pokaż, że $\varphi[M]$ też jest rozmaitością klasy C^1.

3. Niech $P \subseteq \mathbb{R}^n$ będą k-wymiarowymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^n$, $f : P \to P^\perp$ będzie klasy C^1, $M = \{x + f(x) : x \in P\} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie wykresem funkcji f, $x_0 \in P$, $a = x_0 + f(x_0) \in M$. Pokaż, że istnieją zbiory otwarte $U \subseteq T_aM$ i $V \subseteq P$ oraz funkcja $g : U \to T_aM^\perp$ klasy C^1 takie, że

$$x_0 \in V\,, \quad 0 \in U\,, \quad \mathrm{d}g(0) = 0\,, \quad g(0) = 0\,,$$
$$\{x + f(x) : x \in V\} = \{a + y + g(y) : y \in U\}\,.$$

Wskazówki. Niech $\alpha, \beta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ będą izometrycznymi włożeniami takimi, że $\alpha[\mathbb{R}^k] = P$ oraz $\beta[\mathbb{R}^k] = T_aM$ (zauważ, że wówczas $\alpha \circ \alpha^\top \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest rzutem ortogonalnym na P). Niech $F : P \to \mathbb{R}^n$ będzie dana przez $F(x) = x + f(x)$ dla $x \in P$. Pokaż, że funkcja $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ dana przez $h = \beta^\top \circ F \circ \alpha - \beta^\top(F(x_0))$ jest odwracalna na pewnym zbiorze otwartym $G \subseteq \mathbb{R}^k$ zawierającym $\alpha^\top(x_0)$. Niech $U = \beta \circ h[G] \subseteq T_aM$ oraz $\bar{g} : U \to \mathbb{R}^n$ będzie dana przez $\bar{g}(z) = F \circ (h|_G)^{-1} \circ \beta^\top(z)$; wtedy $g(z) = (\bar{g}(z) - a) - \beta \circ \beta^\top(\bar{g}(z) - a)$ dla $z \in U$.

Wniosek. Jeśli $N \subseteq \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością klasy C^1 i $a \in N$, to istnieją zbiory otwarte $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq T_aN$ zawierające a i 0 odpowiednio oraz funkcja $f : T_aN \to T_aN^\perp$ taka, że $N \cap U = \{a + x + f(x) : x \in V\}$, $f(0) = 0$, $\mathrm{d}f(0) = 0$.

4. Niech $m, n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant \min\{m, n\}$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową rozmaitością klasy C^1, a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie klasy C^1. Załóżmy, że $\mathrm{d}\varphi(x)|_{T_xM}$ jest rzędu k dla wszystkich $x \in M$ oraz $\varphi|_M$ jest różnowartościowa. Pokaż, że $M = \varphi[N]$ jest rozmaitością klasy C^1.

5. Pokaż, że $\mathbf{O}(n) = \{A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : A^\top \circ A = I\}$ jest rozmaitością klasy C^1 wymiaru $n(n-1)/2$.

6. Rozpatrzmy funkcję $\varphi : S \to \mathbb{R}^4$ daną wzorem

$$\varphi(x, y, z) = (x^2 - y^2,\, 2xy,\, y^2 - z^2,\, 2yz) \quad \text{dla } (x, y, z) \in S^2\,,$$

gdzie $S = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\|_2 = 1\}$ jest sferą dwuwymiarową. Niech $M = \varphi[S] \subseteq \mathbb{R}^4$.

- Zbadaj dla jakich $p \in S$ istnieje w $\mathbb{R}^3$ otoczenie $U \ni p$ takie, że zbiór $\varphi[U \cap S]$ jest rozmaitością klasy C^1.
- Zbadaj dla jakich punktów $q \in M$ istnieje w $\mathbb{R}^4$ otoczenie $V \ni q$ takie, że zbiór $V \cap M$ jest rozmaitością klasy C^1.
- Zbadaj czy prawdą jest, że $(u, v, w, t) \in M$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$4(u^2 - w^2) = 4(u + w) - 3(v^2 - t^2)$$
$$\text{oraz} \quad (u + w)^2(v^2 - t^2) = (v^2 - t^2)(u + w) - (v^2 - t^2)^2\,.$$

Uwaga. Może się zdarzyć, że dla pewnego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}^3$ zbiór $\varphi[S \cap U]$ jest rozmaitością ale $\varphi[S] \cap \varphi[U]$ nie jest rozmaitością nawet jeśli $\varphi|_U$ jest dyfeomorfizmem, gdyż $\varphi|_S$ nie musi być różnowartościowa.

7. Niech
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^4 + xyz = 4\}.$$
   - Wykaż, że M jest rozmaitością klasy C^1.
   - Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie $(3^{1/3}, 0, -1)$.

8. Wyznacz kres dolny i górny funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^8 = 14\}.$$

9. Płaszczyzna $x + y + z = 12$ przecina paraboloidę $z = x^2 + y^2$. Wyznacz najwyżej i najniżej położony punkt przekroju.

10. Stożek $z^2 = x^2 + y^2$ przecina płaszczyznę o równaniu $x + 2y + 3z = 3$. Znajdź punkty tego przecięcia położone najbliżej i najdalej początku układu współrzędnych.

11. Wyznacz kres dolny i górny funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ na zbiorze
   - $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2\}$;
   - $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2,\ z = 1\}$.

12. Wyznacz kres górny i dolny funkcji $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ na zbiorze S jeśli
   - $f(x, y) = x^2 - y^2$, $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$;
   - $f(x, y) = x^2 + y^2$, $S = \{(x, y) : 2x + 3y = 6\}$;
   - $f(x, y, z) = xyz$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z = 1\}$;
   - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 1,\ x + 2y + 3z = 6\}$.

13. Na elipsie o równaniu $x^2 + 2y^2 = 1$ znajdź punkty, które są położone najbliżej i najdalej od prostej $x + y = 2$.

14. Znajdź zbiór wartości funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze $S = \{(x, y, z) : |x|^3 + |y|^3 + |z|^3 \leqslant 1\}$.

15. Znajdź kresy funkcji $f(x, y, z) = xy - z$ na zbiorze $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z \geqslant 0\}$.

16. Znajdź kres górny funkcji $f(x, y, z, t) = xt - yz$ na zbiorze
$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z + y + z + t = 8,\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 25\}.$$

17. Niech $g(x, y) = xy$ dla $x, y \geqslant 0$. Ustalmy liczby $p, q > 1$ takie, że $p + q = pq$. Dla każdej stałej $c > 0$ niech
$$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^p/p + y^q/q = c\}.$$
Proszę wyznaczyć kresy funkcji g na zbiorze L_c, a następnie udowodnić nierówność $xy \leqslant x^p/p + y^q/q$.

18. Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze S, gdzie

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 \cdots x_m$, $S = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|^2 = 1\}$;
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = y + z$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\,, x^2 + y^2 \leqslant x\}$;

  Wskazówka. Wykazać, że wnętrze $\operatorname{int} S$ jest niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^3$, a brzeg $\partial S = S \setminus \operatorname{int} S$ jest rozmaitością. Szukać ekstremów lokalnych znanymi sposobami na każdym z tych zbiorów osobno.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1\big\}$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x}{7} + \frac{y}{5}$, $S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\big\}$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, $S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\big\}$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, $S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 25\big\}$;
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1\Big\}$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5x + 3y$, $S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4\sin(x) = 3\cos(y)\big\}$.

Uwaga. W niektórych przykładach nie trzeba korzystać z twierdzenia Lagrange'a.

19. Znajdź kres górny funkcji $f(x, y, z) = z^4(x^2 - xy + y^2) + z^2(x^4 + y^4)$ na czworościanie o wierzchołkach $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(4, 4, 0)$.

20. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie normą klasy C^1. Definiujemy $F^\top : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F^\top(y) = \sup\{\langle x,\, y\rangle : x \in \mathbb{R}^n,\ F(x) \leqslant 1\}\,.$$

(a) Pokaż, że $F^\top$ jest normą.

(b) Pokaż, że jeśli $y \in \mathbb{R}^n$ spełnia $F^\top(y) = 1$ to istnieje $x \in \mathbb{R}^n$ taki, że $F(x) = 1$ oraz $\nabla F(x) = y$.

Wskazówka. Twierdzenie Lagrange'a o ekstremach związanych.

(c) Pokaż, że jeśli $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, to $F^\top(\nabla F(x)) = 1$.

Wskazówka. Zauważ, że $\nabla F(\lambda x) = \nabla F(x)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, więc można założyć, że $F(x) = 1$.

Wskazówka. Wartość $\|\nabla F(x)\|^{-1}\langle \nabla F(x),\, y\rangle$ można interpretować jako długość rzutu y na kierunek wyznaczany przez $\nabla F(x)$, $\nabla F(x)$ jest ortogonalny do poziomicy F, a zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 1\}$ jest wypukły.

(d) Niech $S = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 1\}$ i $S^\top = \{x \in \mathbb{R}^n : F^\top(x) = 1\}$ będą sferami jednostkowymi w przestrzeniach unormowanych $(\mathbb{R}^n, F)$ i $(\mathbb{R}^n, F^\top)$. Wywnioskuj, że

$$S^\top = \nabla F[S]\,.$$

Czy $\nabla F|_S : S \to S^\top$ jest homeomorfizmem?

(e) Pokaż, że $F^{\top\top} = F$.

Uwaga. Być może łatwiej pokazać, że $F^{**} : \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ pokrywa się z F przy naturalnym utożsamieniu $\operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ z $\mathbb{R}^n$. W tym celu warto spojrzeć na dowód najprostszej wersji twierdzenia Hahna-Banacha; cf. [Rud91, 3.2].

21. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie normą klasy C^2. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ kładziemy $g(x) = \frac{1}{2}F(x)^2$ i zakładamy, że g jest *ściśle wypukła*, tzn.

$$g(tx + (1-t)y) < tg(x) + (1-t)g(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ oraz } 0 < t < 1\,.$$

   (a) Pokaż, że $\nabla g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem spełniającym

$$F^\top(\nabla g(x)) = F(x)\,.$$

   (b) Niech $y \in \mathbb{R}^n$ będzie punktem różniczkowalności $F^\top$. Pokaż, że

$$(\nabla g)^{-1}(y) = F^\top(y)\nabla F^\top(y)\,.$$

22. Niech $1 \leqslant k < \infty$ będzie liczbą naturalną, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie *jednostajnie wypukłą* normą klasy C^k tzn. istnieje $c > 0$ takie, że

$$\mathrm{d}^2F(x)(u,u) \geqslant c\|u\|^2 \quad \text{dla } x, u \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1,\ u \perp x\,.$$

Niech $g(x) = \frac{1}{2}F(x)^2$.

   (a) Pokaż, że $\nabla g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorfizmem.
   (b) Pokaż, ze $F^\top$ jest klasy C^2.
   (c) Niech $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie *transformacją Legendre'a* g, tzn.

$$h(y) = \langle (\nabla g)^{-1}(y),\, y\rangle - g((\nabla g)^{-1}(y)) \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}^n\,.$$

   Pokaż, że $h(y) = \frac{1}{2}F^\top(y)^2$.

Literatura

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. URL: `https://doi.org/10.1007/978-3-642-62010-2`,

[Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.

[Str16] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II (skrypt wykładu), Jan 2016. wersja z dnia: 5.01.2016. URL: `http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/Analiza_Matematyczna_2/Notatki_files/skrypt-amII-05-01-2016.pdf`.