Twierdzenie (TFO, cf. [Str16, 3.9], [Bir86, §8])**.** *Załóżmy, że $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1, $a \in \Omega$, $\mathrm{d}f(a)$ jest izomorfizmem liniowym. Wówczas istnieją zbiory otwarte $U \subseteq \Omega$ oraz $V \subseteq \mathbb{R}^n$ takie, że $a \in U$, $f(a) \in V$, $f|U : U \to V$ jest bijekcją oraz $(f|U)^{-1} : V \to U$ jest klasy C^1.*

Twierdzenie (TFU, cf. [Str16, 3.13], [Bir86, §10])**.** *Załóżmy, że $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ jest otwarty, $(a, b) \in \Omega$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ jest klasy C^1, $\Omega_{x,*} = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in \Omega\}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_{*,y} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in \Omega\}$ dla $y \in \mathbb{R}^m$, $F_{x,*} : \Omega_{x,*} \to \mathbb{R}^m$ i $F_{*,y} : \Omega_{*,y} \to \mathbb{R}^m$ dane są przez $F_{x,*}(y) = F(x, y) = F_{*,y}(x)$ dla $(x, y) \in \Omega$ oraz $\mathrm{d}F_{a,*}(b)$ jest izomorfizmem liniowym. Wówczas istnieją zbiory otwarte $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq \mathbb{R}^m$ oraz funkcja $h : U \to \mathbb{R}^m$ klasy C^1 takie, że $a \in U$, $b \in V$, oraz*

$$\big\{(x, y) \in U \times V : F(x, y) = 0\big\} = \big\{(x, h(x)) : x \in U\big\}\,.$$

Ponadto, $\mathrm{d}h(x) = -(\mathrm{d}F_{x,*}(h(x)))^{-1} \circ \mathrm{d}F_{*,h(x)}(x)$.

Definicja ([Str16, Definicja 3.19], [Bir86, s. 56])**.** Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty. Przekształcenie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazywamy *dyfeomorfizmem klasy C^1* jeśli $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1, f jest różnowartościowe, $f[\Omega]$ jest otwarty, oraz $f^{-1} \in C^1(f[\Omega], \mathbb{R}^n)$.

---

1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$f(x, y) = \big(x^2 + y - y^2,\ 2xy + y\big)\,.$$
   - Wyznacz wszystkie punkty, w otoczeniu których f ma funkcję odwrotną klasy C^1.
   - Wykaż, że punkt o współrzędnych $(2, 1)$ jest jednym z nich.
   - Wyznacz różniczkę funkcji odwrotnej w punkcie $(4, 5)$.
2. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$F(x, y) = \big(u(x, y),\ v(x, y)\big)\,, \quad \text{gdzie} \quad u(x, y) = x(x^3 - 3y^2)\,, v(x, y) = y(3x^2 - y^2)\,.$$
   Czy istnieje takie otoczenie punktu $(0, 0)$ na którym F jest bijekcją?
3. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$f(x, y) = \big(f_1(x, y),\ f_2(x, y)\big) = \big(x^2 - 2y + 3y^2,\ xy + y^2\big)\,.$$
   - Uzasadnij, że f zawężona do pewnego otoczenia U punktu $(1, 1)$ jest bijekcją ma pewien zbiór otwarty V zawierający $(2, 2)$.
   - Wyznacz $\mathrm{D}_2(f|_U)^{-1}(2, 2)$.
4. Zbadaj czy równanie $\sin y = x$ określa jednoznacznie funkcję ciągłą $y = y(x)$ na pewnym otoczeniu punktów $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ oraz $(1, \pi/2)$.
5. Wykaż, że istnieje taki $\varepsilon > 0$, że dla $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ istnieje taka funkcja $y = y(x)$ klasy C^1, że $x \exp(y(x)) + y(x) \exp(x) = 2$. Czy y jest dwukrotnie różniczkowalna w 0? Jeśli tak, wyznacz $y''(0)$.
6. Wykaż, że układ równań
$$\begin{aligned} x \exp(z + w) &= 2y - zw\,, \\ z^3 - w^3 &= xz + yw\,, \end{aligned}$$

wyznacza w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (3, 1, 1, -1)$ zmienne (z, w) jako funkcje $z = z(x, y)$, $w = w(x, y)$ klasy C^1 takie, że $z(3, 1) = 1$ oraz $w(3, 1) = -1$.

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie różniczkowalna w $(1, -1)$ oraz $\mathrm{D}_1 f(1, -1) = 2$, $\mathrm{D}_2 f(1, -1) = -4$. Znajdź różniczkę funkcji $g(x, y) = f(z(x, y), w(x, y))$ w punkcie $(3, 1)$.

7. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^1 i spełnia

$$x\mathrm{D}_1 F(x, y) + y\mathrm{D}_2 F(x, y) \neq 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\,.$$

Pokaż, że równanie $F(x/z, y/z) = 0$ określa lokalnie funkcję $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taką, że

$$x\mathrm{D}_1 z(x, y) + y\mathrm{D}_2 z(x, y) = z(x, y)\,.$$

8. Pokaż, że w małym otoczeniu punktu $(0, 2)$ równanie $x \exp(y) + y \exp(x) = 2$ opisuje ograniczoną funkcję różniczkowalną $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Oblicz $y'(0)$.

9. Wykaż, że równanie

$$z^3 - xyz + y^2 = 16$$

wyznacza w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (1, 4, 2)$ dokładnie jedną funkcję $z = z(x, y)$. Oblicz $\mathrm{D}_1 z(1, 4)$ oraz $\mathrm{D}^{(2,0)} z(1, 4)$.

10. Wykaż, że równanie $x \ln w + w \ln y = 0$ wyznacza w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, w_0) = (1, 1, 1)$ zmienną w jako funkcję pozostałych zmiennych $w = g(x, y)$ oraz g jest klasy C^1.

Wyznacz wielomian Taylora stopnia 2 funkcji g w punkcie $(1, 1)$.

11. Znajdź dyfeomorfizm zbioru U na V jeśli

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0\}\,, \quad V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 3v^2 < 1,\ 2v > u + |u|\}\,.$$

12. Niech

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \max(x, -x(2 + \sqrt{3}))\}\,, \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}\,.$$

Znajdź dyfeomorfizm klasy C^1 przekształcający G na H.

Wskazówka: $2 + \sqrt{3} = \operatorname{tg} 75^\circ$.

13. Niech $n \geqslant 3$. Rozważmy zbiór $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\}$ oraz funkcję

$$F(x_1, \ldots, n_n) = \left(\frac{x_1^2}{x_2}, \frac{x_2^2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}^2}{x_n}, \frac{x_n^2}{x_1} \right)\,.$$

Wykazać, że F jest dyfeomorfizmem zbioru A na ten sam zbiór.

14. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, a $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1.

- Pokaż, że $F[\Omega]$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$.
- Pokaż, że $F[U] \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Pokaż, że $F[\partial U] = \partial(F[U])$ jeśli $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty.

15. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy C^1. Załóżmy, że istnieje stała $M \in (0, \infty)$ taka, że
$$M^{-1}\|x - y\| \leqslant \|F(x) - F(y)\| \leqslant M\|x - y\| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^n$$
(mówimy wówczas, że F jest bilipschitzowska). Pokaż, że F jest dyfeomorfizmem oraz
$$\mathbf{B}(x, M^{-1}r) \subseteq F[\mathbf{B}(x, r)] \subseteq \mathbf{B}(x, Mr) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \text{ oraz } r \in (0, \infty)\,.$$

16. Funkcja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że
$$\langle \mathrm{d}F(x)v, v\rangle \geqslant C\|v\|^2 \quad \text{dla } x, v \in \mathbb{R}^n\,.$$
Udowodnij, że F jest dyfeomorfizmem oraz $F[\mathbb{R}^n] = \mathbb{R}^n$.

17. Przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1 przekształcającym zbiór
$$A = \{(x, y) : y = 0\} \quad \text{na zbiór} \quad B = \{(x, y) : y = x^2\}\,.$$
Udowodnić, że $\sup_{x\in\mathbb{R}^2}(\|\mathrm{d}F(x)\| + \|\mathrm{d}F^{-1}(x)\|) = \infty$.

Wskazówka. Popatrz na obrazy kwadratów $[-R, R] \times [0, 2R]$ dla $R \in (0, \infty)$ i skorzystaj z zadania 15.

18. Niech $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ oraz $R = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$. Udowodnić, że nie istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taki, że $f(S) = R$.

19. Znajdź dyfeomorfizm ze zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$ jeśli
   - A jest wnętrzem jednostkowej kuli Euklidesowej,
   - A jest wnętrzem jednostkowej kuli w metryce indukowanej przez normę $\|\cdot\|_3$,
   - A jest wnętrzem elipsy o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$,
   - A jest wnętrzem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$,
   - A jest wnętrzem trapezu o wierzchołkach $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, 1)$, $(-1/2, 1)$,
   - A jest wnętrzem pięciokąta foremnego o środku w $(0, 0)$ i jednym z wierzchołków w punkcie $(1, 0)$.

20. Znajdź dyfeomorfizm ze zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^3$ jeśli
   - A jest wnętrzem jednostkowej kuli Euklidesową,
   - A jest wnętrzem jednostkowej kuli w metryce indukowanej przez normę $\|\cdot\|_3$,
   - A jest wnętrzem czworościanu o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

21. Niech $n \in \mathbb{N}$ spełnia $n \geqslant 2$. Kładziemy
$$\Psi : \mathbf{B}^{n-1}(0, 1) \to \partial\mathbf{B}^n(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\,, \quad \Psi(z) = \big(z, \sqrt{1 - \|z\|^2}\big)\,,$$
$$\Phi : \mathbf{B}^{n-1}(0, 1) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n\,, \quad \Phi(z, r) = r\Psi(z)\,.$$
Pokaż, że Φ jest dyfeomorfizmem oraz istnieje funkcja wymierna $D : \mathbf{B}^{n-1}(0, 1) \to [0, \infty)$ taka, że
$$|\det \mathrm{d}\Phi(z, r)| = r^{n-1}D(z) \quad \text{dla } z \in \mathbf{B}^{n-1}(0, 1) \text{ i } r \in (0, \infty)\,.$$

22. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie klasy C^1 zaś $l \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że
$$A = F^{-1}\{0\} \subseteq \operatorname{Int} B\,, \quad \text{gdzie} \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n : \dim\ker \mathrm{d}f(x) = l\}\,.$$
Pokaż, że A jest rozmaitością różniczkową wymiaru l.

Dla jakich $l \in \mathbb{N}$ zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : \dim\ker \mathrm{d}f(x) = l\}$ jest otwarty niezależnie od wyboru funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1?

Czy założenie, że A leży we *wnętrzu* B jest istotne, tzn. czy można wnioskować, że A jest rozmaitością jeśli $A \subseteq B$ oraz $A \cap B \setminus \operatorname{Int} B \neq \varnothing$?

23. Niech P będzie d wymiarową podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^n$, $f : P \to P^\perp$ będzie klasy C^2, $\|\mathrm{d}f(x)\| < 1$ dla $x \in P$, $f(0) = 0$, $F : P \to \mathbb{R}^n$ będzie dana wzorem $F(x) = x + f(x)$ dla $x \in P$, $Q = \operatorname{im} \mathrm{d}F(0)$. Zauważ, że przy naturalnym utożsamieniu $\mathbb{R}^n$ z $P \times P^\perp$ zbiór $\operatorname{im} F$ odpowiada wykresowi f. Pokaż, że istnieje funkcja $g : Q \to Q^\perp$ taka, że jeśli $G : Q \to \mathbb{R}^n$ dana jest przez $G(x) = x + g(x)$ dla $x \in Q$, to $\operatorname{im} G = \operatorname{im} F$. Wyznacz $\mathrm{d}^2 g(0)$ w zależności od $\mathrm{d}f(0)$ oraz $\mathrm{d}^2 f(0)$.

Uwaga. Dla ułatwienia zapisu i obliczeń można wybrać izometryczne zanurzenia $j : \mathbb{R}^d \to P$ oraz $k : \mathbb{R}^d \to Q$ (co odpowiada wybraniu bazy dla P i Q). Wówczas $p = j^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ i $q = k^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ będą rzutami ortogonalnymi. Następnie można rozważyć przekształcenie $q \circ F \circ j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ – czy to dyfeomorfizm?

24. Niech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L < 1$, tzn. $\|g(x) - g(y)\| \leqslant L\|x - y\|$ dla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dana jest wzorem $f(x) = x + g(x)$. Pokaż, że f jest bijekcją oraz istnieją stałe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzą oszacowania $C_1\|x - y\| \leqslant \|f(x) - f(y)\| \leqslant C_2\|x - y\|$. Udowodnij, że jeśli g jest klasy C^k, to f jest dyfeomorfizmem klasy C^k.

25. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie d wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^m$ klasy C^1 oraz $p_n, q_n \in M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0 = \lim_{n\to\infty} q_n$ oraz $p_n \neq q_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że istnieją liczby dodatnie $a_n \in (0, \infty)$ oraz wektory $v_n \in T_p M$ spełniające $\|v_n\| = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$ takie, że
$$\lim_{n\to\infty} a_n(p_n - q_n) - v_n = 0\,.$$

Wskazówka. Niech $\varphi : U \to M$ parametryzuje M w otoczeniu punktu p_0. Niech $x_n, y_n \in U$ będą takie, że $\varphi(x_n) = p_n$ oraz $\varphi(y_n) = q_n$. Ponieważ ma być $\|v_n\| = 1$, więc dobrym pomysłem jest położyć $a_n = \|p_n - q_n\|^{-1}$ jednak lepszym będzie przyjąć $a_n = \|\mathrm{d}\varphi(y_0)(x_n - y_n)\|^{-1}$. Przydatne może też okazać się twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej.

Literatura

[Bir86] Andrzej Birkholc. *Analiza matematyczna.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warsaw, 1986. Funkcje wielu zmiennych. [Functions of several variables].

[Str16] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II (skrypt wykładu), Jan 2016. wersja z dnia: 5.01.2016. URL: `http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/Analiza_Matematyczna_2/Notatki_files/skrypt-amII-05-01-2016.pdf`.