Twierdzenie ([Str16, Twierdzenie 2.54]). *Załóżmy, że funkcja* $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^m$ *jest* $(k-1)$*-krotnie różniczkowalna na* Ω*, kula* $\mathbf{B}(a,r) \subseteq \Omega$ *dla pewnego* $r > 0$ *i* $\mathrm{d}^k f(a)$ *istnieje. Wówczas, dla* $\|h\| < r$*,*

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)h + \tfrac{1}{2!}\mathrm{d}f(a)h^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}\mathrm{d}^k f(a)h^k + R(h)\,,$$

gdzie $R(h)/\|h\|^k \to 0$ *dla* $h \to 0$*.*

---

1. Niech
$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ oraz} \quad f(0,0) = 0\,.$$
Znajdź drugie pochodne cząstkowe funkcji f. Czy f jest klasy $C^2(\mathbb{R}^2)$?

2. Niech $f(x,y) = x\exp(xy^2)$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wykaż, że f jest dwukrotnie różniczkowalna oraz znajdź $\mathrm{d}^2 f(1,1)hh$, gdzie $h \in \mathbb{R}^2$.

3. Niech $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ oraz $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$. Znajdź $\mathrm{d}^2 g(t)$.

4. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ spełniają $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Wyznacz kresy funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem
$$f(x,y) = \frac{ax+by+c}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

5. Wyznacz kresy funkcji $f : [0,\pi]^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem
$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y) \quad \text{dla } x, y \in [0,\pi].$$

6. Wyznacz lokalne minima i maksima funkcji
$$f(x,y,z) = \ln(1+x^2)\cdot\cos(y)\cdot\exp(y+\sin z) \quad \text{dla } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

7. Niech $f(x,y) = x^3y - 3x^2y + y^2$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wyznacz wszystkie punkty krytyczne f. Dla każdego punktu krytycznego rozpoznaj, czy f ma tym punkcie lokalne ekstremum.

8. Niech
$$f(x,y) = (x-y^2)(2x-y^2)\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$
Wykaż, że f ograniczona do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$ ma minimum w punkcie $(0,0)$ ale nie ma minimum w $(0,0)$ jako funkcja dwóch zmiennych.

9. Niech $a \in \mathbb{R}$. Znajdź wielomian Taylora stopnia 2 w punkcie $(0,a)$ funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x,y) = \exp(xy^2)$. Następnie udowodnij, że funkcja $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x,y) = x^{-1}(\exp(xy^2) - 1)$ przedłuża się na całą przestrzeń $\mathbb{R}^2$ do funkcji klasy C^1.

10. Pokaż, że jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ oraz $[a, a+h] \subseteq \Omega$, to istnieje punkt $\theta \in (0,1)$ taki, że
$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(a)h_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(a+\theta h)h_ih_j\,.$$
Wskazówka. Skorzystaj ze wzoru Taylora z resztą w postaci Lagrange'a dla funkcji jednej zmiennej $g(t) = f(a+th)$.

11. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha .$$

12. Niech $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia $d \in \mathbb{N}$, tzn. istnieją liczby w_α dla $\alpha \in \mathbb{N}^n$ takie, że $W(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant d} w_\alpha x^\alpha$. Pokaż, że istnieją przekształcenia $A_j : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dla $j \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}$ takie, że A_j jest j-liniowe i symetryczne oraz

$$W(x) = \sum_{j=0}^{d} \frac{1}{j!} A_j x^j .$$

13. Niech $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia $d \in \mathbb{N}$. Pokaż, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{W(x)}{\|x\|^d} = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 0 .$$

14. Niech (e_1, e_2) to baza standardowa $\mathbb{R}^2$. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ taka, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - \operatorname{tg}(x)\sin(y)}{x^2 + y^2} = 0 .$$

Oblicz $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(0, 0) = \mathrm{D}^{(1,1)} f(0, 0) = \mathrm{d}^2 f(0, 0)(e_1, e_2)$.

15. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Wiadomo, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - \exp(x - y)}{x^2 + y^2} = 2 .$$

Oblicz $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(0, 0)$.

16. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x, y) = (x^3 - x - y)(2x - y - 2)$. Wiadomo, że $\mathrm{d}f(p) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $p \in \{(-2, -6), (-1, -2), (1, 0)\} = A$. Dla każdego $p \in A$ rozpoznaj, czy f ma ekstremum lokalne w p.

17. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spełnia

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\|x\|^2} = 0 .$$

Czy wynika stąd, że $\mathrm{d}^2 f(0) = 0$?

Literatura

[Str16] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II (skrypt wykładu), Jan 2016. wersja z dnia: 5.01.2016. URL: `http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/Analiza_Matematyczna_2/Notatki_files/skrypt-amII-05-01-2016.pdf`.