Definicja. Niech X będzie przestrzenią liniową. Zbiór $C \subseteq X$ nazywamy *stożkiem* jeśli

$$\forall v \in C \ \forall t \in (0, \infty) \quad tv \in C\,.$$

Definicja. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, $A \subseteq X$, $a \in A$. Definiujemy *stożek styczny* T_aA jako zbiór tych $w \in X$ dla których istnieje ciąg $x_j \in A \setminus \{a\}$ taki, że

$$\lim_{j\to\infty} x_j = a \quad \text{oraz} \quad \frac{w}{\|w\|} = \lim_{j\to\infty} \frac{x_j - a}{\|x_j - a\|}\,.$$

---

1. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, $\Omega \subseteq X$ będzie otwarty, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to Y$ będzie klasy C^1, $\mathrm{d}f(a)$ będzie ciągłym przekształceniem liniowym oraz $A = f^{-1}[f(a)]$. Pokaż, że $T_aA \subseteq \ker \mathrm{d}f(a)$.

   $\star$ *Uwaga.* Gdy poznamy *twierdzenie o funkcji uwikłanej* będziemy mogli powiedzieć więcej. Mianowice, jeśli $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$ oraz $l \in \mathbb{N}$ jest takie, że $\dim \ker \mathrm{d}f(x) = l$ dla każdego $x \in A$, to $T_aA = \ker \mathrm{d}f(a)$; zob. [**?**, Twierdzenie 11.1].

2. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, $\Omega \subseteq X$ będzie otwarty, $A \subseteq \Omega$, $a \in A$, $f : \Omega \to Y$ będzie klasy C^1. Pokaż, że $\mathrm{d}f(a)[T_aA] \subseteq T_{f(a)}f[A]$, tzn. jeśli $v \in T_aA$, to $\mathrm{d}f(a)v \in T_{f(a)}f[A]$. Kiedy zachodzi równość $\mathrm{d}f(a)[T_aA] = T_{f(a)}f[A]$?
3. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in M$, $v \in T_pM$. Dane są dwie funkcje $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 takie, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in M$. Korzystając z zadania 1 pokaż, że $\mathrm{d}f(p)v = \mathrm{d}g(p)v$.
4. Niech X będzie unormowaną przestrzenią liniową, $p \in X$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. Załóżmy, że istnieje $r > 0$ takie, że $\mathbf{B}(p, r) \cap A = \mathbf{B}(p, r) \cap B$. Pokaż, że wówczas $T_pA = T_pB$.
5. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$. Dla każdego $z \in A$ opisz stożek styczny T_zA.
6. Niech $k < n$, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

(a) Załóżmy, że $P_1, \ldots, P_l$ są k-wymiarowymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^n$ oraz dla każdej $(n-k)$-wymiarowej podprzestrzeni liniowej $K \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieje $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ takie, że $P_j \cap K = \{0\}$. Pokaż, że $\mathrm{rank}(A) = k$ wtw. wtedy gdy istnieje $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ takie, że $\dim A[P_j] = k$.

(b) Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie dowolną bazą $\mathbb{R}^n$ zaś $\Lambda(n, k)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji rosnących $\sigma : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ (każda taka funkcja odpowiada wyborowi pewnych k liczb spośród n liczb). Pokaż, że rodzina $P_\sigma = \mathrm{lin}\{v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\}$ indeksowana funkcjami $\sigma \in \Lambda(n, k)$ spełnia powyższe założenia.

(c) Wywnioskuj, że $\mathrm{rank}\, A = k$ wtw. gdy macierz A (zapisana w dowolnych bazach) zawiera k liniowo niezależnych wektorów (pionowych bądź poziomych).

7. Niech $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie klasy C^1. Pokaż, że $\{x \in \mathbb{R}^n : \dim \ker \mathrm{d}f(x) = n - k\}$ jest otwarty. *Wskazówka.* Skorzystaj z zadania 6.
8. Niech $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem

   $$G(x, y, z, t) = \big(z + x^2 + y^2 - 2,\ z + y^2 + t^2 - 2\big)\,.$$

   Kładziemy $A = G^{-1}\{0\}$. Opisz stożek styczny do A w punkcie $(1, 1, 0, 1)$.
   Wskazówka. Należy założyć prawdziwość twierdzenia z zadania 1$\star$.
9. Niech P, Q, X, Y, Z będą przestrzeniami unormowanymi, $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$, $b : X \times Y \to Z$ będzie dwuliniowe, $f : P \to X$, $g : Q \to Y$ i $h(p, q) = b(f(p), g(q))$. Pokaż, że

   $$\mathrm{d}b(x, y)(u, v) = b(x, v) + b(u, y) \quad \text{dla } x, u \in X,\ y, v \in Y\,,$$
   $$\mathrm{d}h(p, q)(r, s) = b(f(p), \mathrm{d}g(q)s) + b(\mathrm{d}f(p)r, g(q)) \quad \text{dla } p, r \in P,\ q, s \in Q\,.$$

10. Niech $I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będzie dane wzorem $Ix = x$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Definiujemy

$$\mathbf{O}(n) = \{A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : A^* \circ A = I\}.$$

Opisz równaniami przestrzeń styczną do $\mathbf{O}(n)$ w punkcie I, a następnie w dowolnym punkcie $A \in \mathbf{O}(n)$. Wyznacz wymiar $T_A\mathbf{O}(n)$.
Wskazówka. Należy założyć prawdziwość twierdzenia z zadania $1\star$.

11. Udowodnić, że jeśli funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia

$$y\mathrm{D}_1 f(x,y) - x\mathrm{D}_2 f(x,y) = 0 \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

to istnieje funkcja różniczkowalna $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ taka, że

$$f(x,y) = g(x^2 + y^2) \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

12. Niech $p \in (0,\infty)$, a $f : (0,\infty)^3 \to R$ będzie funkcją różniczkowalną spełniającą

$$x^{1-p}\mathrm{D}_1 f(x,y,z) = y^{1-p}\mathrm{D}_2 f(x,y,z) = z^{1-p}\mathrm{D}_3 f(x,y,z) \quad \text{dla } (x,y,z) \in (0,\infty)^3.$$

Pokaż, że istnieje funkcja $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x,y,z) = \varphi(x^p + y^p + z^p)$.

Zadania dodatkowe

13. Niech $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Definiujemy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$g(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Pokaż, że

$$g'(x) = \int_0^1 \mathrm{D}_1 f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Wskazówka. Rozpatrz rodzinę funkcji $L = \{l_h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : h \in (-1,1)\}$ daną przez $l_h(x,y) = h^{-1}(g(x+h,y) - g(x,y))$ dla $h \in (-1,1)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Korzystając ze zwartości odcinka $[0,1]$ wykaż jednostajną ciągłość $\mathrm{D}_1 f(x,y)$, a następnie pokaż, że L jest rodziną funkcji równociągłych. Dalej skorzystaj z twierdzenia Arzeli–Ascoliego by pokazać, że l_h zbiega jednostajnie przy $h \to 0$ do $\mathrm{D}_1 f$.

14. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^1 oraz $g : \Omega \to R$ będzie dana wzorem

$$g(x) = \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{dla } x \in \Omega.$$

Udowodnij, że dla $x \in \Omega$ oraz $v \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\mathrm{d}g(x)v = \int_a^b \mathrm{d}f(x,t)(v,0)\mathrm{d}t.$$

Wskazówka. Rozważ funkcję $g(a,b,c,d) = \int_a^b f(c,d,t)\mathrm{d}t$.

15. Wyznacz pochodne cząstkowe funkcji $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$h(x,y) = \int_{xy}^{x^2} f(xy^2, \exp(xy), t)\mathrm{d}t,$$

gdzie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1.