1. Znajdź pochodne cząstkowe funkcji:
   (a) $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x^{yz}$,
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x \exp(y) \ln(z) + \operatorname{arctg}(x/z)$,
   (c) $f : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \|x\|_2$,
   (d) $f : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = \exp(xy) + \sin^2(z) + x^z$,
   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = y^2 \exp(x) + x^2 \exp(y)$.
2. Wyznacz pochodną oraz gradient funkcji $f : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \|x\|_2$.
3. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jeśli

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$f(z) = \begin{cases} \|z\|_2^2 \sin(\|z\|_2^{-2}) & \text{dla } z \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \\ 0 & \text{dla } z = 0 \in \mathbb{R}^k \end{cases}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{dla } y \neq 0 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases},$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}\,.$$

4. Znajdź pochodną funkcji $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x^{yz}$ w punkcie $(1, 1, 1)$ w kierunku wektora $(1, 2, 0)$.
5. Zbadaj istnienie pochodnej kierunkowej $\mathrm{D}_v f(p)$ jeśli

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\exp(xy)-1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla x} = 0 \end{cases},$$

$$p = (0,1)\,, \quad v \in \{(1,1)\,,\, (1,0)\}\,.$$

6. Zbadaj istnienie pochodnej kierunkowej $\mathrm{D}_v f(p)$ jeśli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^5\}$ oraz $p \in M$ i v jest wektorem stycznym do M w p.
7. Niech $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^5\}$, $p \in M$, $v \in T_p M$. Dane są dwie funkcje różniczkowalne $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że $f(a) = g(a)$ dla $a \in M$. Pokaż, że $\mathrm{D}f(p)v = \mathrm{D}g(p)v$. *Wskazówka.* Reguła łańcuchowa.
8. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem

$$f(x,y) = \Big(x^2 + y - y^2,\, 2xy + y\Big)\,.$$

   Zakładając, że f jest odwracalna w otoczeniu punktu $(2, 1)$ i funkcja odwrotna jest różniczkowalna w punkcie $(4, 5)$ wyznacz pochodną funkcji odwrotnej do f w punkcie $(4, 5)$.

9. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie taka, że dla (x, y) w pewnym otoczeniu punktu $(2, 1)$ zachodzi wzór
$$f(x^2 + y - y^2,\ 2xy + y) = \big(3x, 2y\big)\,.$$
Wyznacz pochodną funkcji f w punkcie $(4, 5)$.

10. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$. Dla każdego $z \in A$ opisz stożek styczny $T_z A$.

11. Niech $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$G(x, y, z, t) = \big(z + x^2 + y^2 - 2,\ z + y^2 + t^2 - 2\big)\,.$$
Kładziemy $A = G^{-1}\{0\} = \{w \in \mathbb{R}^4 : G(w) = 0\}$. Opisz stożek styczny do A w punkcie $(1, 1, 0, 1)$.

12. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie wykresem pewnej funkcji gładkiej typu $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $p \in M$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie gładkie i takie, że $\mathrm{D}f(p)$ jest izomorfizmem liniowym, $v \in \mathbb{R}^n$ będzie wektorem prostopadłym do $T_p M$. Pokaż, że wektor $w = (\mathrm{D}f(p)^{-1})^* v$ jest prostopadły do $T_{f(p)} f[M]$.

    Uwaga. Dziedzina i przeciwdziedzina f wyposażone są w pewne iloczyny skalarne (niekoniecznie standardowe) definiujące pojęcia prostopadłości i względem których wyznaczone jest przekształcenie sprzężone do $\mathrm{D}f(p)^{-1}$.

    Zadanie z $\star$: Załóżmy, że $\|v\| = 1$. Oblicz $\|w\|$.

13. Niech $v \in \mathbb{R}^2$. Opisz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że $\mathrm{D}_v f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}^2$.

14. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Wiadomo, że f spełnia
$$x\mathrm{D}_1 f(x, y) + y\mathrm{D}_2 f(x, y) = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$
Wykaż, że f jest funkcją stałą.

15. Załóżmy, że $K \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zwarty, wypukły i zawiera pewne otoczenie punktu $(0, 0)$. Dana jest funkcja ciągła $f : K \to \mathbb{R}$, różniczkowalna we wnętrzu zbioru K i spełniająca
$$x\mathrm{D}_1 f(x, y) + y\mathrm{D}_2 f(x, y) > 0 \quad \text{dla } (x, y) \in K \setminus \{(0, 0)\}\,.$$
Wykaż, że f ma globalne minimum w punkcie $(0, 0)$, a maksimum jest przyjmowane na brzegu zbioru K.