Niech $U \subseteq \mathbb{R}^k$ będzie otwarty, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $e_1, \dots, e_k$ będzie bazą standardową $\mathbb{R}^k$.
Pochodna kierunkowa f w kierunku $v \in \mathbb{R}^k$ w punkcie $p \in U$ to wektor

$$\partial_v f(p) = \mathrm{D}_v f(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} \in \mathbb{R}^m .$$

Niech $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ wówczas *i-ta pochodna cząstkowa* f w punkcie $p \in U$ to wektor

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \mathrm{D}_i f(p) = \mathrm{D}_{e_i} f(p) = \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 0} \frac{f(p+te_i) - f(p)}{t} \in \mathbb{R}^m .$$

Pochodna f w punkcie $p \in U$ to przekształcenie liniowe $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ wyznaczone jednoznacznie warunkiem

$$\text{(1)} \qquad \lim_{\mathbb{R}^k \ni h \to 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - Lh\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{lub inaczej} \quad f(p+h) = f(p) + Lh + o(\|h\|) .$$

Stosuje się oznaczenia $\mathrm{D}f(p) = L$ lub $\mathrm{d}f(p) = L$.
Uwaga. Jeśli f jest różniczkowalne w $p \in U$ (tzn. istnieje pochodna $\mathrm{D}f(p)$), to

$$\text{(2)} \qquad \partial_v f(p) = \mathrm{D}f(p)v \quad \text{dla } v \in \mathbb{R}^k .$$

Ponadto, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe f istnieją *w pewnym otoczeniu punktu p i są ciągłe w p*, to f ma pochodną w p i zachodzi (2).

Wniosek praktyczny. Niech $A \subseteq U$ będzie zbiorem punktów różniczkowalności f, $B \subseteq U$ zbiorem punktów, w których wszystkie pochodne cząstkowe są ciągłe, zaś $C \subseteq U$ zbiorem punktów, w których wszystkie pochodne cząstkowe istnieją. Wówczas $\operatorname{int} B \subseteq A \subseteq C$. Ponadto, f jest różniczkowalna w punkcie $p \in C$ wtedy i tylko wtedy gdy przekształcenie liniowe $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ zadane na bazie standardowej przez $Le_i = \mathrm{D}_i f(p)$ dla $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ spełnia (1).

---

1. Wyznacz bezpośrednio z definicji pochodne poniższych funkcji
   (a) $f(x) = Ax$, gdzie $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$,
   (b) $f(x) = Ax + g(x)$, gdzie $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ oraz wiadomo, że $\lim_{x \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$,
   (c) $f(x) = \|x\|_2^4$,
   (d) $f(x) = B(x, x)$, gdzie $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest przekształceniem dwuliniowym.
2. Niech $x \in \mathbb{R}^n$. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, że pochodna kierunkowa $\mathrm{D}_v f(x)$ istnieje i *jest dodatnia* dla wszystkich $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$?
3. Niech $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, że pochodna kierunkowa $\mathrm{D}_v f(x)$ istnieje i *jest dodatnia* dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$?
4. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v, x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$. Pokaż, że jeśli $\mathrm{D}_v f(x)$ istnieje, to
$$\mathrm{D}_{\alpha v} f(x) = \alpha \mathrm{D}_v f(x) .$$
5. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u, v, x \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Czy z istnienia $\mathrm{D}_v f(x)$ i $\mathrm{D}_u f(x)$ wynika istnienie $\mathrm{D}_{u+v} f(x)$?

6. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie otwarty i wypukły, a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $\mathrm{D}_1 f(x)$ i $\mathrm{D}_2 f(x)$ istnieją dla wszystkich $x \in \Omega$. Ponadto istnieje stała $M \in (0, \infty)$ taka, że $|\mathrm{D}_i f(x)| \leqslant M$ dla wszystkich $x \in \Omega$ oraz $i \in \{1, 2\}$. Pokaż, że

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\|x - y\|_1 \quad \text{dla } x, y \in \Omega$$

Czy powyższe oszacowanie będzie prawdziwe jeśli opuścimy założenie o wypukłości Ω?

7. Niech $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Opisz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że $\mathrm{D}_v f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}^2$.

8. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0)\,, \quad f(0, 0) = 0\,.$$

(a) Zbadaj ciągłość f w punkcie $(0, 0)$ i wyznacz pochodną kierunkową $\mathrm{D}_v f(0, 0)$ dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^2$.

(b) Niech $g = f^2$. Zbadaj ciągłość g w punkcie $(0, 0)$ i wyznacz pochodną kierunkową $\mathrm{D}_v g(0, 0)$ dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^2$.

9. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $\mathrm{D}_v f(0)$ istnieje dla każdego $v \in \mathbb{R}^2$. Czy musi zachodzić

$$\mathrm{D}_{u+v} f(0) = \mathrm{D}_u f(0) + \mathrm{D}_v f(0) \quad \text{dla } u, v \in \mathbb{R}^2\,?$$

10. Znajdź zbiór punktów różniczkowalności podanych niżej funkcji. Dla każdej z funkcji wyznacz macierz różniczki (w bazie standardowej) tam gdzie istnieje.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,

(b) $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$,

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy + yz + zx$,

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \exp(xy)$,

(e) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^4 + y^3 = 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^5 + y^4 + x^2 y^4}{x^4 + y^3}$,

(f) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : 1 - xy = 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$,

(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

11. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{jeśli } xy \neq 0 \text{ oraz} \quad f(x, y) = 0 \quad \text{jeśli } xy = 0\,.$$

Wykaż, że f jest ciągła i ma wszystkie pochodne kierunkowe w punkcie $(0, 0)$. Dla jakich punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ funkcja f jest różniczkowalna?

12. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y) = |x|^{1/|y|} |y|^{1/|x|} \quad \text{jeśli } xy \neq 0 \text{ oraz} \quad f(x, y) = 0 \quad \text{jeśli } xy = 0\,.$$

Wyznacz zbiór punktów ciągłości oraz zbiór punktów różniczkowalności funkcji f.

13. Wykaż, że istnieje funkcja ciągła $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$F(x,y) = \frac{\exp(xy^2) - 1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0 \text{ oraz} \quad F(0,y) = g(y)$$
jest ciągła. Znajdź zbiór różniczkowalności tak zdefiniowanej funkcji F.

14. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie różniczkowalna. Funkcje $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dane są wzorami
$$g(x,y) = \big(5x^2 \sin y,\, e^{5x\cos y}\big)\,, \quad h(x,y) = \big(4x - 3e^4 y,\, 6x + 4e^4 y,\, -x + e^4 y\big)\,.$$
Zbiór $U \subseteq \mathbb{R}^2$ jest otwarty i zawiera punkt $(1, \arcsin(3/5))$. Wiadomo, że
$$f \circ g(z) = h(z) \quad \text{dla } z \in U\,.$$
Wyznacz macierz różniczki f w punkcie $(3, e^4)$ w bazach standardowych.

Wskazówka. Zachodzi $g(1, \arcsin(3/5)) = (3, e^4)$.

15. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $f(0) = \pi/2$, $\mathrm{D}_k f(0) = k$ dla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Oblicz pochodną funkcji
$$g(t) = \cos\big(f(t, t^2, \ldots, t^n)\big) \quad \text{w punkcie } t = 0\,.$$

16. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x,y) = (x^3 - x - y)(2x - y - 2)$. Wiadomo, że $\mathrm{D}f(p) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $p \in \{(-2,-6), (-1,-2), (1,0)\} = A$. Dla każdego $p \in A$ rozpoznać, czy f ma ekstremum lokalne w p.

17. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\}$ oraz $f : A \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y & \text{dla } x = 0\,. \end{cases}$$
Wykaż różniczkowalność f w punktach $(0,0)$ oraz $(0,2)$.

18. Wyznaczyć kres górny funkcji $f(x,y) = x(y - x - 1)e^{-y}$ na zbiorze $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y\}$.

19. Wykaż, że funkcja dana przez $f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ oraz $f(0,0) = 0$ jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru $U = \mathbf{B}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ ale nie jest klasy C^1.

20. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia warunek
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{D}_i f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}^n\,.$$
Wykaż, że na każdym zbiorze zwartym i wypukłym $K \subseteq \mathbb{R}^n$ funkcja f osiąga swój kres dolny w pewnym punkcie brzegu ∂K.

Wskazówka. Niech $v = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ zbadaj zachowanie funkcji $g(t) = f(x + t(x - v))$.

Zadania dodatkowe

Niech $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ będzie zbiorem wszystkich automorfizmów $\mathbb{R}^n$, $I \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ będzie dane przez $Ix = x$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Normę na $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definiujemy przez $\|A\| = \sup\{\|Av\| : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \leqslant 1\}$. Standardowy iloczyn skalarny wektorów $u, v \in \mathbb{R}^n$ oznaczamy przez $\langle u, v\rangle$. Przez $\operatorname{trace} A$ oznaczamy ślad przekształcenia liniowego $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

21. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że $\mathrm{D}_v f(0)$ istnieje oraz $\mathrm{D}_{u+v} f(0) = \mathrm{D}_u f(0) + \mathrm{D}_v f(0)$ dla wszystkich $u, v \in \mathbb{R}^n$. Czy f jest różniczkowalna w 0?

22. Niech $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką taką, że $s'(-1) = 0 = s'(1)$, a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie rzutowaniem na kulę jednostkową w normie $\|\cdot\|_\infty$ (czyli kwadrat), tzn.

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\|z\|_\infty} & \text{jeśli } \|z\|_\infty > 1 \\ z & \text{jeśli } \|z\|_\infty \leqslant 1\,. \end{cases}$$

    Definiujemy $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $h(x, y) = (s(x), s(y))$. Pokaż, że funkcja $h \circ f$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathrm{D}(h \circ f) = \mathrm{D}h \circ f$.

23. Niech $f : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ będzie dane przez $f(A) = \det A$ dla $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Udowodnij, że

$$\mathrm{D}f(I)A = \operatorname{trace} A \quad \text{dla } A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\,.$$

24. Niech $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ oraz $t \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli $\|tA\| < 1$, to

$$(I + tA)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j t^j A^j\,.$$

25. Funkcja $f : \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ jest dana wzorem $f(A) = A^{-1}$ dla $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$. Wyznacz $\mathrm{D}f(I)$, a następnie $\mathrm{D}f(X)$ dla dowolnego $X \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$.

26. Niech X, Y, Z będą unormowanymi przestrzeniami liniowymi $\Omega \subseteq X$ będzie otwarty, $v \in Y$, $f : \Omega \to \mathrm{Hom}(Y, Z)$, $g : \Omega \to Z$ będzie dana wzorem $g(x) = f(x)v$ dla $x \in \Omega$. Pokaż, że jeśli $\mathrm{D}f(x) \in \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, Z))$ istnieje dla pewnego $x \in \Omega$, to

$$(\mathrm{D}f(x)u)v = \mathrm{D}g(x)u \quad \text{dla każdego } u \in X\,.$$

27. Dana jest funkcja gładka $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ taka, że $\|\gamma'(t)\| = 1$ dla $t \in \mathbb{R}$. Niech $\tau : \mathbb{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będzie takie, że $\tau(t)$ to rzutowanie ortogonalne na przestrzeń (linię) rozpiętą przez $\gamma'(t)$. Udowodnij, że

$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle = 0 \quad \text{oraz} \quad \tau'(t)(\gamma'(t)) = \gamma''(t) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}\,.$$

28. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $p \in \mathbb{R}^n$ oraz $\mathrm{D}f(p) = 0$. Dla $v \in \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ definiujemy funkcję $g_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $g_v(t) = f(p + tv)$ oraz liczbę $\varepsilon(v) = \inf\{t \in (0, \infty) : g_v'(t) = 0\}$. Załóżmy, że dla każdego $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ funkcja g_v ma minimum lokalne w 0 oraz $\inf\{\varepsilon(v) : v \in \mathbb{S}^{n-1}\} > 0$. Pokaż, że wówczas f ma minimum lokalne w p.