

Definicja. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $A \subseteq X$ jest *niespójny* jeśli istnieją dwa zbiory otwarte $U, V \in \tau$ takie, że

$$A \subseteq U \cup V, \quad A \cap U \neq \emptyset, \quad A \cap V \neq \emptyset, \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Zbiór A jest *spójny* jeśli nie jest niespójny.

Każdy maksymalny spójny podzbiór X nazywa się *spójną składową* X .

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ oraz $g \in X$. Mówimy, że $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ zbiega do g jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, g) = 0$. Piszemy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g$.

Definicja. Niech $(X, \rho), (Y, \sigma)$ będą przestrzeniami metrycznymi, $x \in X$ oraz $f : X \rightarrow Y$. Mówimy, że f jest *ciągła w x* jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in X \quad \rho(y, x) \leq \delta \Rightarrow \sigma(f(y), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Uwaga. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będziemy najczęściej traktować jako przestrzeń metryczną z metryką $\rho(x, y) = \|x - y\|_2$ dla $x, y \in A$.

1. Wyznacz granice funkcji lub wykaż, że nie istnieją.

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}, & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{x^5 - y^5}{x - y}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^3}, \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\exp(-x^2 - y^2) - 1}{\sin(x^2 + y^2)}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\exp(-1/(x^2 + y^2))}{x^4 + y^4}, \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2), & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sin(x^2 + y^2)}, & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}. \end{aligned}$$

2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$. Wykaż, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ nie istnieje.}$$

3. Niech $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y) = (x + y) \sin(1/x) \sin(1/y)$. Wykaż, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ istnieje ale } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 \text{ nie istnieje.}$$

4. Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji $f, g, k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ danych wzorami

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0, \\ g(x, y) &= \frac{2xy^3 + x^2 y^3}{x^4 + 2y^4} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \quad g(0, 0) = 0, \\ h(x, y) &= \left(\frac{xy}{x+y}, \frac{x+y}{x^3 + y^3} \right) \quad \text{dla } x+y \neq 0, \quad h(x, y) = (0, 3) \quad \text{dla } x+y = 0, \\ k(x, y) &= \frac{x-y}{x^3 - y} \quad \text{dla } y \neq x^3, \quad k(x, y) = 1 \quad \text{dla } y = x^3. \end{aligned}$$

5. Wyznaczyć granice lub wykazać, że nie istnieją.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} \sqrt{\frac{1}{x^4 + y^4} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4 + y^4} + \frac{1}{y}}, \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{z^2 \sin(x^2 + y^2)}{x^2 y + z^2}.$$

6. Funkcje $f, g, h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$f(x, y) = \frac{y^2}{y^2 + (x - y^2)^2}, \quad g(x, y) = f(x, y)(x + y), \quad h(x, y) = |x|^{\ln |y|}.$$

Dla $k \in \{f, g, h\}$:

- (a) obliczyć granice iterowane $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} k(x, y)$ oraz $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} k(x, y)$;
 - (b) obliczyć granicę funkcji k w punkcie $(0, 0)$ wzdłuż prostej opisanej równaniem $Ax + By = 0$, gdzie $A, B \in \mathbb{R}$;
 - (c) stwierdzić i uzasadnić czy istnieje granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} k(x, y)$;
 - (d) zbadać istnienie granicy $\lim_{|x| \rightarrow \infty} k(x)$.
7. Niech $n \geq 2$ oraz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła. Ponadto wiadomo, że istnieją $a, b \in \mathbb{R}^n$ takie, że $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Pokaż, że f ma nieskończenie wiele punktów zerowych.
8. Niech $A = [1, 2] \times [0, 2\pi)$, przekształcenie $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y) \quad \text{oraz} \quad B = f[A].$$

Udowodnij, że f jest ciągłe i różnowartościowe ale $f^{-1} : B \rightarrow A$ nie jest ciągłe.

9. Czy poniższe odwzorowania $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ są ciągłe, różnowartościowe i „na”?

$$f(x, y) = (2x + 3y + 1, 7x - y - 3), \quad g(x, y) = (2x + 3y, x^2 - y^2).$$

10. Znajdź przekształcenie ciągłe, różnowartościowe i „na” $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$.
11. Znajdź przekształcenie ciągłe i „na” $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$. Udowodnij, że jeśli f jest różnowartościowe to odwzorowanie odwrotne do f nie może być ciągłe.
- Wskazówka.* Obraz zbioru zwartego przez funkcję ciągłą jest zwarty.
12. Niech $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\} \subseteq \mathbb{R}$. Opisz wszystkie składowe spójności A .
13. Naszkicuj poziomice funkcji

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) &= x^2 - y^2, & f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) = \sqrt{xy}, \\ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) &= x^2 + y^2, & f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) = x^y, \\ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) &= (x + y)^2, & f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) = \frac{y}{x}, \\ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) &= |x| + y. \end{aligned}$$

Zadania dodatkowe

Definicja. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną oraz $A \subseteq X$. Zbiór $U \subseteq A$ nazwiemy *otwartym w A* jeśli istnieje zbiór $V \in \tau$ taki, że $U = A \cap V$.

14. Niech $(X, \rho), (Y, \sigma)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Pokaż, że $f : X \rightarrow Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq Y$ przeciwobraz $f^{-1}[U]$ jest otwarty w X .
15. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Pokaż, że każda spójna składowa X jest zbiorem domkniętym w X . Czy każda spójna składowa X musi być otwarta w X ? Pokaż, że jeśli zbiór $B \subseteq X$ jest spójny oraz zarówno otwarty jak i domknięty, to musi być spójną składową X .
16. Niech

$$\text{Aut}(\mathbb{R}^n) = \{A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \text{rzęd}(A) = n\}.$$

Pokaż, że $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ jest niespójny.

Wskazówka. Obraz zbioru spójnego przez funkcję ciągłą jest spójny.