Definicja 1. Niech X będzie przestrzenią liniową. Funkcję $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ nazywamy *normą* jeśli spełnia następujące warunki.

1. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ dla $x, y \in X$.
2. $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $x \in X$.
3. $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = 0$.

Definicja 2. Mówimy, że norma $\|\cdot\|$ *pochodzi od iloczynu skalarnego* $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ jeśli $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Definicja 3. Niech $p \in (0, \infty)$. Definiujemy funkcję $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\|x\|_p = \left(\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n .$$

Ponadto, jeśli $p = \infty$, to kładziemy $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

Definicja 4. Niech X będzie przestrzenią liniową. Mówimy, że $f : X \to \mathbb{R}$ jest *wypukła* jeśli $f(tx + (1-t)y \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$ dla wszystkich $x, y \in X$ oraz $t \in (0, 1)$.

---

1. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie ściśle wypukła (tzn. $F(sx + (1-s)y) < sF(x) + (1-s)F(y)$ jeśli $x, y \in \mathbb{R}^n$ są liniowo niezależne oraz $s \in (0, 1)$), nieujemna i dodatnio jednorodna (tzn. $F(tx) = |t|F(x)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $t \in \mathbb{R}$). Pokaż, że F jest normą.

   Uwaga. Jeśli wiemy, że $f^{-1}[\{0\}] = \{0\}$ to zamiast ścisłej wypukłości można założyć po prostu wypukłość.

2. Pokaż, że $\|\cdot\|_p$ jest normą dla $p \in [1, \infty]$.

   Wskazówka: $|a+b|^p = |a+b| \cdot |a+b|^{p-1}$.

3. Niech $p, q \in [1, \infty]$ spełniają $1/p + 1/q = 1$ (zakładamy, że $1/\infty = 0$). Pokaż, że

$$\|x\|_p = \sup\{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i : y \in \mathbb{R}^n,\ \|y\|_q \leqslant 1\} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n .$$

4. Niech $0 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\|x\|_{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1} .$$

5. Na przestrzeni liniowej X dana jest norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ pochodząca od iloczynu skalarnego $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$. Pokaż, że spełniona jest *tożsamość równoległoboku*:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right) \quad \text{dla } v, w \in X . \tag{1}$$

6. Na przestrzeni liniowo-topologicznej X dana jest norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ spełniająca (1). Zakładamy, że operacje dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez skalar są ciągłe oraz $\|\cdot\|$ jest ciągła. Pokaż, że funkcja $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) \quad \text{dla } v, w \in X$$

   definiuje iloczyn skalarny na X.

7. Opisz wszystkie normy na $\mathbb{R}$.

8. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Niech B będzie domkniętą kulą jednostkową w X, tj.
$$B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\} .$$
Pokaż, że B spełnia następujące warunki:
   (a) jeśli $x \in B$, to $-x \in B$ (symetria środkowa względem 0),
   (b) jeśli $x, y \in B$ oraz $t \in [0, 1]$, to $tx + (1 - t)y \in B$ (wypukłość),
   (c) dla każdego $x \in X$ istnieje $t \in (0, \infty)$ takie, że $tx \notin B$ (ograniczoność).
   (d) dla każdego $x \in X$ istnieje $t \in (0, \infty)$ takie, że $tx \in B$ (pochłanianie).

9. Niech X będzie przestrzenią liniową, a $B \subseteq X$ będzie zbiorem spełniającym warunki (a), (b), (c), (d) z zadania 8. Definiujemy funkcję $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ wzorem
$$\|x\| = \inf \{t \in (0, \infty) : x/t \in B\} \quad \text{dla } x \in X .$$
Pokaż, że $\|\cdot\|$ jest normą.

   Uwaga. Powyższa funkcja to tzw. *funkcjonał Minkowskiego.*

   Wskazówka. Bez straty ogólności (dlaczego?) można założyć, że $x/\|x\| \in B$ dla każdego $x \in X$, $x \neq 0$.

10. Naszkicuj kule jednostkowe w $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ dla $p \in (0, \infty]$.

11. Zbadaj czy poniższe zbiory są otwarte, domknięte, zwarte, wypukłe.
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$,
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1,\ |y| < 2\}$,
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\}$,
   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x + y + z| \leqslant 4\}$,
   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2,\ x - y \geqslant -1\}$,
   (f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$,
   (g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$,
   (h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$,
   (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 3z \leqslant 7\}$,
   (j) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > |y|\}$,
   (k) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \geqslant 1,\ x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.

12. Znajdź przykład zbioru domkniętego $F \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takich, że $f[F] \subseteq \mathbb{R}^m$ nie jest domknięty.

Zadania dodatkowe

13. Pokaż, że norma na $\mathbb{R}^2$ pochodzi od iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy kula jednostkowa w tej normie jest elipsą.

14. Niech $p \in (0,1)$. Pokaż, że istnieje liczba $K \in (0,\infty)$ taka, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^n$ oraz $t \in \mathbb{R}$ funkcja $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spełnia

$$\|x\|_p = 0 \iff x = 0\,, \quad \|tx\|_p = |t| \cdot \|x\|_p\,, \quad \|x+y\|_p \leqslant K\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)\,.$$

Uwaga: Funkcja spełniająca powyższe warunki nazywa się quasi-normą.

Definicja 5. Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi. Przez $\mathrm{Hom}(X,Y)$ będziemy oznaczać przestrzeń liniową wszystkich przekształceń liniowych $X \to Y$.

15. Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Dla $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ kładziemy

$$\langle f, g\rangle = \mathrm{trace}(f^* \circ g)\,,$$

gdzie trace oznacza ślad przekształcenia liniowego. Pokazać, że $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym.

16. Niech $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi. Pokazać, że funkcja $\|\cdot\| : \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leqslant 1\}$$

jest normą na $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Jest to tzw. *norma operatorowa.*

Definicja 6. Jeśli (X, F) jest przestrzenią unormowaną, to normę operatorową na $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{R})$ nazywamy też *normą dualną* i oznaczamy F^*.

17. Dana jest skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa X wyposażona w iloczyn skalarny $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$. Wówczas przekształcenie $X \ni v \mapsto \omega_v \in \mathrm{Hom}(X,\mathbb{R})$, gdzie $\omega_v(w) = \langle v,\, w\rangle$ dla $w \in X$, jest izomorfizmem liniowym (*naturalnym* w kategorii przestrzeni z iloczynem skalarnym). Niech F będzie normą na X (niezwiązaną z iloczynem skalarnym) oraz F^* będzie normą dualną na $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{R})$. Znajdź wyrażenie opisujące normę na X odpowiadającą normie F^* przy izomorfizmie $X \simeq \mathrm{Hom}(X,\mathbb{R})$.

18. Niech F będzie normą na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej X (bez iloczynu skalarnego). Przekształcenie $\Phi : X \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ takie, że $\Phi(x)(\omega) = \omega(x)$ jest *naturalnym* izomorfizmem. Pokaż, że przy takim utożsamieniu mamy $F^{**} = F$.

19. Niech $k \leqslant n$. Zbadać, czy zbiór

$$\left\{f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n) : \mathrm{rząd}(f) = k\right\}$$

jest otwarty lub domknięty w $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$.

Definicja 7. Niech X będzie zbiorem. *Topologią na* X nazywamy rodzinę τ podzbiorów X spełniającą następujące aksjomaty

1. jeśli $A \subseteq \tau$, to $\bigcup A \in \tau$;
2. jeśli $A \subseteq \tau$ i A jest skończony, to $\bigcap A \in \tau$;
3. $\varnothing \in \tau$ oraz $X \in \tau$.

Przestrzeń z topologią nazywamy *przestrzenią topologiczną*. Elementy rodziny τ nazywamy *zbiorami otwartymi w* X. Dopełnienia elementów τ nazywamy *zbiorami domkniętymi w* X.

Definicja 8. Niech (X, τ), (Y, σ) będą przestrzeniami topologicznymi oraz $f : X \to Y$. Mówimy, że f jest *ciągła* jeśli $f^{-1}[U] \in \tau$ dla każdego $U \in \sigma$ (tzn. przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest otwarty).

Uwaga. Niech (X, τ), (Y, σ) to przestrzenie topologiczne. Jeśli $\tau = \mathbf{2}^X$, to wszystkie funkcje typu $X \to Y$ są ciągłe. Jeśli $\tau = \{\varnothing, X\}$, to funkcje typu $X \to \mathbb{R}$ są ciągłe tylko jeśli są stałe.

Definicja 9. Niech (X, τ), (Y, σ) będą przestrzeniami topologicznymi. *Topologa produktowa* na $X \times Y$ to najmniejsza topologia $\eta \subseteq \mathbf{2}^{X \times Y}$ zawierająca wszystkie zbiory postaci $U \times Y$ oraz $X \times V$ dla wszystkich możliwych $U \in \tau$ oraz $V \in \sigma$.

Definicja 10. Przestrzeń liniową X wraz z topologią τ nazywamy *przestrzenią liniowo-topologiczną* jeśli operacje liniowe, tj. dodawanie wektorów $+ : X \times X \to X$ oraz mnożenie przez skalar $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, są ciągłe.

Definicja 11. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Najmniejszą topologię zawierająca wszystkie kule otwarte w X nazywać będziemy *silną topologią na* X.

Definicja 12. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. *Słaba topologia na* X to najmniejsza topologia zawierająca wszystkie zbiory postaci $\omega^{-1}[I]$, gdzie $\omega \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$, a $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym. Inaczej mówiąc, to najmniejsza topologia, w której wszystkie funkcjonały liniowe są ciągłe.

20. Niech $X = \mathbb{R}$. Pokaż, że topologia τ generowana przez przedziały otwarte zadaje strukturę liniowo-topologiczną na X.

21. Pokaż, że przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ wraz z silną topologią jest przestrzenią liniowo-topologiczną.

22. Niech (X, τ) będzie przestrzenią liniowo-topologiczną *skończonego wymiaru*. Pokaż, że wszystkie funkcjonały liniowe na X, tzn. elementy $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$, są ciągłe.

    Niech Y będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Wywnioskuj, że każde przekształcenie liniowe typu $X \to Y$ (tzn. element $\mathrm{Hom}(X, Y)$) jest ciągłe.

23. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie *skończenie wymiarową* przestrzenią unormowaną. Pokaż, że topologia silna i słaba się pokrywają. Innymi słowy, jeśli τ to słaba topologia na X, a σ to silna topologia na X, to

    (a) τ zawiera wszystkie zbiory postaci $\{x \in X : \|x-a\| < r\}$ dla $a \in X$ oraz $r \in (0, \infty)$;
    (b) σ zawiera wszystkie zbiory postaci $\omega^{-1}[I]$, gdzie $\omega \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$ oraz $I \subseteq \mathbb{R}$ jest otwarty.