Zadanie. Niech $n \geqslant 2$ oraz $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spełnia

1. $F(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}^n$,
2. $F(sx + (1-s)y) < sF(x) + (1-s)F(y)$ dla wszystkich par liniowo niezależnych wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ oraz $s \in (0,1)$,
3. $F(tx) = |t|F(x)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $t \in \mathbb{R}$.

Pokaż, że $F^{-1}\{0\} = 0$ (zatem F jest normą).

Rozwiązanie. Załóżmy, że istnieje $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ taki, że $F(y) = 0$. Wówczas $F(-y) = F(-1 \cdot y) = |-1|F(y) = F(y) = 0$. Niech $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ będzie dowolnym wektorem liniowo niezależnym z y. Mamy

$$F(x) = F(x) + F(y) > 2F\Big((x+y)/2\Big) \geqslant 0\,, \quad \text{więc} \quad F(x) \neq 0\,.$$

Kładziemy

$$z_1 = \frac{x+y}{2}\,, \quad z_2 = \frac{x-y}{2}\,.$$

Obliczając wyznacznik z macierzy (z_1, z_2) przedstawionej w bazie (x, y) łatwo sprawdzamy, że z_1 i z_2 są liniowo niezależne. Korzystając z tożsamości $z_1 + z_2 = 2x$ otrzymujemy

$$2F(x) < F(z_1) + F(z_2) < (F(x) + F(y)) + (F(x) + F(-y)) \quad \text{stąd,} \quad 0 < 2F(y)$$

co daje sprzeczność z założeniem, że $F(y) = 0$. $\square$