Zadanie. Niech $p \in (0, \infty)$. Znajdź dyfeomorfizm przekształcający p-kulę $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p < 1\}$ na $\mathbb{R}^n$.

Rozwiązanie 1 (dla $n = 2$). Zauważmy, że jeśli $(x, y) \in B$, to

$$-\Big(1 - |y|^p\Big)^{1/p} < x < \Big(1 - |y|^p\Big)^{1/p}.$$

Definiujemy $f : B \to \mathbb{R}^2$ wzorem

$$f(x, y) = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2(1 - |y|^p)^{1/p}}\right),\ y\right).$$

Ewidentnie jest to funkcja klasy C^∞. Łatwo też wypisać funkcję odwrotną. Mianowicie

$$f^{-1}(w, z) = \Big(\tfrac{2}{\pi}(1 - |z|^p)^{1/p} \operatorname{arc\,tg} w,\ z\Big).$$

Ponownie łatwo widać, że f^{-1} jest klasy C^∞. Zatem f jest dyfeomorfizmem klasy C^∞.

Rozwiązanie 2. Kładziemy

$$f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|_p} \quad \text{dla } x \in B\,.$$

Wówczas

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + \|y\|_p} \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}^n\,.$$

Rozwiązanie 3. Kładziemy

$$f(x) = \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}\|x\|_p)\frac{x}{\|x\|_p} \quad \text{dla } x \in B \setminus \{0\} \quad \text{oraz} \quad f(0) = 0\,.$$

Wówczas

$$f^{-1}(y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(\|y\|_p)\frac{y}{\|y\|_p} \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{oraz} \quad f^{-1}(0) = 0\,.$$

Zadanie. Sprawdź, że f i f^{-1} są klasy C^1. Można zacząć od wykazania, że funkcje jednej zmiennej $g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{t}$ oraz $h(t) = \frac{\operatorname{arctg} t}{t}$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ przedłużają się do funkcji klasy C^1 na całym $\mathbb{R}$.