# Iloczyn wektorowy i wyznacznik Grama

Sławomir Kolasiński

17 kwietnia 2020

Najbardziej elegancka definicja iloczynu wektorowego $n-1$ wektorów $v_1, \ldots, v_{n-1}$ w $\mathbf{R}^n$ jaką znam jest następująca:

> Iloczyn wektorowy wektorów $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ to jedyny wektor $w \in \mathbf{R}^n$ taki, że dla każdego innego wektora $u \in \mathbf{R}^n$ zachodzi
>
> $$\langle u\,, w \rangle = \det(u, v_1, \ldots, v_{n-1})\,.$$
>
> Wektor $w$ będziemy oznaczać $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$.

Powyższa definicja nie mówi, że coś takiego istnieje – definiuje tylko pewną własność, której żądamy od iloczynu wektorowego.

**Jednoznaczność.** Jeśli $w_1, w_2 \in \mathbf{R}^n$ i dla wszystkich $u \in \mathbf{R}^n$ zachodzi $\langle w_1\,, u \rangle = \langle w_2\,, u \rangle$, to $\langle w_1 - w_2\,, u \rangle = 0$ dla wszystkich $u \in \mathbf{R}^n$; jeśli jednak $w_1 - w_2 \neq 0$, to przyjmując $u = w_1 - w_2$ mielibyśmy $\langle w_1 - w_2\,, u \rangle > 0$.

**Konstruckcja.** Przypominając sobie rozwinięcie Laplace'a wyznacznika, widzimy od razu jak taki wektor skonstruować. Pracując w bazie standardowej $\mathbf{R}^n$ wystarczy na $i$-tej współrzędnej położyć $(-1)^{i+1} M_i$, gdzie $M_i$ jest wyznacznikiem macierzy powstałej przez usunięcie $i$-tego wiersza z macierzy $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ – umawiamy się, że te wektory wpisujemy pionowo w macierzy.

**Geometryczna interpretacja.** Przypomnijmy, że $|\det(u, v_1, \ldots, v_{n-1})|$ jest $n$-wymiarową objętością równoległościanu rozpiętego przez wektory $u, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Jeśli $u$ jest jednostkowy ($\|u\| = 1$) i prostopadły do wszystkich wektorów $v_1, \ldots, v_{n-1}$, to $|\det(u, v_1, \ldots, v_{n-1})|$ jest $(n-1)$-wymiarową objętością równoległościanu rozpiętego na wektorach $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

**Prostopadłość do tworzących wektorów.** Z antysymetrii i $n$-liniowości wyznacznika wnioskujemy też, że jeśli $u$ leży w przestrzeni $\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, to

$$\langle u\,, v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \rangle = \det(u, v_1, \ldots, v_{n-1}) = 0\,.$$

Widać stąd, że $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ jest prostopadły do wszystkich wektorów $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

**Długość.** Zatem, jeśli $u$ jest jednostkowy ($\|u\| = 1$) i prostopadły do wszystkich wektorów $v_1, \ldots, v_{n-1}$, to

$$\|v_1 \times \cdots \times v_{n-1}\| = |\langle u \,, v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \rangle| = |\det(u, v_1, \ldots, v_{n-1})| \,,$$

czyli długość iloczynu wektorowego jest równa $(n-1)$-wymiarowej objętości równoległościanu rozpiętego przez składowe wektory.

**Macierz i wyznacznik Grama.** Niech $A = (a_1, \ldots, a_k)$ będzie macierzą o $n$ wierszach i $k$ kolumnach. Macierz Grama układu wektorów $a_1, \ldots, a_k$, to macierz $G(a_1, \ldots, a_k) = A^\top \cdot A$. Wyznacznik tej macierzy nazywamy wyznacznikiem Grama.

Zapisując wektory $a_1, \ldots, a_n$ w bazie standardowej $\mathbf{R}^n$ widzimy, że $G(a_1, \ldots, a_k)$ składa się iloczynów skalarnych tych wektorów, tzn. w miejscu $(i, j)$ znajduje się w niej $\langle a_i \,, a_j \rangle$ dla $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Ponadto, jeśli $k = n$, to

$$\det G(a_1, \ldots, a_n) = (\det A)^2 \,.$$

Z powyższej obserwacji, że macierz Grama w bazach standardowych składa się iloczynów skalarnych tworzących wektorów, wynika natychmiast, że jeśli $a_1$ jest prostopadły do pozostałych wektorów $a_2, \ldots, a_n$, to w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie mamy same zera oprócz komórki $(1, 1)$, gdzie występuje $\|a_1\|^2 = \langle a_1 \,, a_1 \rangle$. Stąd

$$a_1 \perp \operatorname{lin}\{a_2, \ldots, a_n\} \qquad \Longrightarrow \qquad \det G(a_1, \ldots, a_n) = \|a_1\|^2 \det G(a_2, \ldots, a_n) \,.$$

**Związek między iloczynem wektorowym i wyznacznikiem Grama.** Połóżmy

$$u = \frac{v_1 \times \cdots \times v_{n-1}}{\|v_1 \times \cdots \times v_{n-1}\|} \,.$$

Z tego co do tej pory powiedzieliśmy wynika, że $\langle u \,, v_j \rangle = 0$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Zatem

$$\begin{aligned} \|v_1 \times \cdots \times v_{n-1}\|^2 &= |\langle u \,, v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \rangle|^2 \\ &= \det(u, v_1, \ldots, v_{n-1})^2 = \det G(u, v_1, \ldots, v_{n-1}) \\ &= \det G(v_1, \ldots, v_{n-1}) \,. \end{aligned}$$