1. Dla skrócenia notacji będziemy w tym arkuszu pisać o *obiektach* i *morfizmach* mając na myśli *rzeczywiste przestrzenie liniowe* i *przekształcenia liniowe* odpowiednio. Symbolem id_A będziemy oznaczać *morfizm identycznościowy* na A, tj. $\mathrm{id}_A(a) = a$ dla $a \in A$. Obiekt zawierający wszystkie *przekształcenia k-liniowe* typu $A_1 \times \cdots \times A_k \to B$ będziemy oznaczać $\mathrm{Hom}(A_1, A_2, \ldots, A_k; B)$. *Obiekt dualny* obiektu A będziemy oznaczać przez $A^* = \mathrm{Hom}(A; \mathbf{R})$.

2 Definicja. *Funktor kowariantny* to transformacja F, która

(a) każdemu obiektowi A przypisuje obiekt $F(A)$;

(b) każdemu morfizmowi $f \in \mathrm{Hom}(A; B)$ przypisuje morfizm $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(A); F(B))$;

(c) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ dla każdego obiektu A;

(d) jeśli $f \in \mathrm{Hom}(A; B)$ oraz $g \in \mathrm{Hom}(B; C)$, to $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

3 Przykład. Niech A będzie obiektem. Dla obiektu X i morfizmu $f \in \mathrm{Hom}(X; Y)$ definiujemy $F(X) = \mathrm{Hom}(A; X)$ oraz $F(f)(g) = f \circ g$. Wówczas F jest funktorem kowariantnym.

4 Definicja. *Funktor kontrawariantny* to transformacja F, która

(a) każdemu obiektowi A przypisuje obiekt $F(A)$;

(b) każdemu morfizmowi $f \in \mathrm{Hom}(A; B)$ przypisuje morfizm $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(B); F(A))$;

(c) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ dla każdego obiektu A;

(d) jeśli $f \in \mathrm{Hom}(A; B)$ oraz $g \in \mathrm{Hom}(B; C)$, to $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

5 Przykład. Niech A będzie obiektem. Dla obiektu X i morfizmu $f \in \mathrm{Hom}(X; Y)$ definiujemy $F(X) = \mathrm{Hom}(X; A)$ oraz $F(f)(g) = g \circ f$. Wówczas F jest funktorem kontrawariantnym.

6 Uwaga. Należy zauważyć, że rodzina wszystkich przestrzeni liniowych nie jest zbiorem (ale jest tzw. *kategorią*), ponieważ nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów, a z dowolnego zbioru X można wygenerować przestrzeń liniową z bazą X. Z tego samego powodu funktor nie jest funkcją.

7 Definicja. Niech F i G będą funktorami kowariantnymi [kontrawariantnymi]. *Naturalna transformacja pomiędzy F i G* to rodzina morfizmów $\eta_X \in \mathrm{Hom}(F(X); G(X))$ indeksowana obiektami X o następującej własności: jeśli X i Y są obiektami zaś $f \in \mathrm{Hom}(X; Y)$, to

$$\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X \qquad [\eta_X \circ F(f) = G(f) \circ \eta_Y]\,;$$

innymi słowy następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad \left[\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] & G(X) \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[u, "F(f)"] & G(Y) \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd}\right].$$

Jeśli dla każdego obiektu X morfizm η_X jest izomorfizmem, to mówimy, że η jest *naturalnym izomorfizmem.*

8 Zadanie. Niech $F_A = \mathrm{Hom}(A;\cdot)$ i $F_B = \mathrm{Hom}(B;\cdot)$ będą zdefiniowane jak w 3, zaś η będzie naturalnym izomorfizmem pomiędzy F_A i F_B. Pokaż, że $\eta_A(\mathrm{id}_A) \in \mathrm{Hom}(B;A)$ oraz $\eta_B^{-1}(\mathrm{id}_B) \in \mathrm{Hom}(A;B)$ są izomorfizmami oraz

$$\eta_A(\mathrm{id}_A) \circ \eta_B^{-1}(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_A \quad \text{i} \quad \eta_B^{-1}(\mathrm{id}_B) \circ \eta_A(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_B \; .$$

9 Definicja. Niech $k, l, n \in \mathbf{N}$, $k + l = n$. Mówimy, że F jest funktorem k-kowariantnym i l-kontrawariantnym jeśli

- każdej n-tce obiektów $(A_1, \dots, A_n)$ przypisuje obiekt $F(A_1, \dots, A_n)$,
- każdej n-tce morfizmów $(f_1, \dots, f_n)$ takich, że
$$f_i \in \mathrm{Hom}(A_i; B_i) \quad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant k \quad \text{oraz} \quad f_j \in \mathrm{Hom}(B_j; A_j) \quad \text{dla } k < j \leqslant n$$
przypisuje morfizm $F(f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{Hom}(F(A_1, \dots, A_n); F(B_1, \dots, B_n))$;
- $F(\mathrm{id}_{A_1}, \dots, \mathrm{id}_{A_n}) = \mathrm{id}_{F(A_1, \dots, A_n)}$;
- jeśli
$$\begin{gathered} f_i \in \mathrm{Hom}(A_i; B_i) \text{ i } g_i \in \mathrm{Hom}(B_i; C_i) \quad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant k \\ \text{oraz} \quad f_j \in \mathrm{Hom}(B_j; A_j) \text{ i } g_j \in \mathrm{Hom}(C_j; B_j) \quad \text{dla } k < j \leqslant n \end{gathered}$$
to
$$F(g_1 \circ f_1\,, \dots, g_k \circ f_k\,, f_{k+1} \circ g_{k+1}\,, \dots, f_n \circ g_n) = F(g_1, \dots, g_n) \circ F(f_1, \dots, f_n)\,.$$

10 Definicja. Będziemy mówili, że n-argumentowe funktory F i G (o takich samych wariancjach) są *naturalnie izomorficzne po współrzędnych* jeśli dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ i każdego wyboru $A_1, \dots, A_k$ naturalnie izomorficzne są funktory Φ i Ψ zdefiniowane przez

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= F(A_1, \dots, A_{i-1}, X, A_{i+1}, \dots, A_k)\,, \quad & \Phi(f) &= F(\mathrm{id}_{A_1}, \dots, f, \dots, \mathrm{id}_{A_n})\,, \\ \Psi(X) &= G(A_1, \dots, A_{i-1}, X, A_{i+1}, \dots, A_k)\,, \quad & \Psi(f) &= G(\mathrm{id}_{A_1}, \dots, f, \dots, \mathrm{id}_{A_n})\,. \end{aligned}$$

11 Przykład. Przypisanie $(A, B) \mapsto \mathrm{Hom}(A; B)$ jest funktorem kontrawariantnym względem pierwszej zmiennej i kowariantnym względem drugiej zmiennej.

12 Uwaga. Zauważmy, że jeśli funktory F i G są naturalnie izomorficzne oraz G i H są naturalnie izomorficzne, to F i H też są naturalnie izomorficzne.

13 Zadanie. Skonstruuj naturalne izomorfizmy po współrzędnych dla par funktorów.

(a) $(A, B, C) \mapsto \mathrm{Hom}(A, B; C)$ oraz $(A, B, C) \mapsto \mathrm{Hom}(B, A; C)$;

(b) $(A, B, C) \mapsto \mathrm{Hom}(A, B; C)$ oraz $(A, B, C) \mapsto \mathrm{Hom}(A; \mathrm{Hom}(B; C))$.

14 Definicja. *Iloczynem tensorowym* obiektów $A_1, \dots, A_k$ nazywamy parę (W, μ), gdzie W jest obiektem, $\mu \in \mathrm{Hom}(A_1, \dots, A_k; W)$ i zachodzi następująca własność uniwersalna: dla każdego $f \in \mathrm{Hom}(A_1, \dots, A_k; Z)$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\bar{f} \in \mathrm{Hom}(W, Z)$ taki, że $f = \bar{f} \circ \mu$, tzn. następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} A_1 \times \cdots \times A_k \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\forall f\ k\text{-lin.}"'] & W \arrow[d, dotted, "\exists! \bar{f}"] \\ & Z\,. \end{tikzcd}$$

Wprowadzamy notację

$$W = A_1 \otimes \cdots \otimes A_k = \bigotimes_{i=1}^k A_i \quad \text{oraz} \quad \mu(a_1, \dots, a_k) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_k\,.$$

Jeśli $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$, to piszemy po prostu

$$\bigotimes_{i=1}^k A = \bigotimes^k A\,.$$

Ponadto kładziemy $\bigotimes^0 A = \mathbf{R}$ oraz $\bigotimes^1 A = A$.

15 Zadanie. Pokaż, że jeśli (W, μ) oraz (V, ν) spełniają definicję iloczynu tensorowego obiektów A_1, …, A_k, to istnieje kanoniczny (tj. taki, którego konstrukcja wykorzystuje tylko własność uniwersalną iloczynu tensorowego) izomorfizm pomiędzy W i V.

16 Zadanie. Pokaż, że jeśli $f \in \mathrm{Hom}(A; B)$ i $g \in \mathrm{Hom}(C; D)$, to istnieje dokładnie jeden morfizm $f \otimes g \in \mathrm{Hom}(A \otimes B; C \otimes D)$ taki, że

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b) \quad \text{dla } a \in A \text{ i } b \in B\,.$$

17 Uwaga. Wynika stąd, że przypisanie $(A, B) \mapsto A \otimes B$ jest funktorem 2-kowariantnym.

18 Zadanie. Korzystając z 13 pokaż, że następujące pary funktorów są naturalnie izomorficzne po współrzędnych.

(a) $A \mapsto A \otimes \mathbf{R}$ i $A \mapsto A$;

(b) $(A, B, C) \mapsto \mathrm{Hom}(A \otimes B; C)$ i $(A, B, C) \mapsto \mathrm{Hom}(A, B; C)$;

(c) $(A, B) \mapsto A \otimes B$ i $(A, B) \mapsto B \otimes A$;

(d) $(A, B, C) \mapsto A \otimes B \otimes C$ i $(A, B, C) \mapsto A \otimes (B \otimes C)$;

(e) $(A, B, C) \mapsto (A \otimes B) \otimes C$ i $(A, B, C) \mapsto A \otimes (B \otimes C)$;

19 Zadanie. Niech A i B będą obiektami.

(a) Pokaż, że istnieje monomorfizm

$$\phi : A^* \otimes B \to \mathrm{Hom}(A; B) \quad \text{taki, że} \quad \phi(\omega \otimes b)(a) = \omega(a)b \quad \text{dla } \omega \in A^* \text{ i } b \in B\,.$$

(b) Niech A i B będą obiektami. Skonstruuj naturalne transformacje między parami funktorów

- $X \mapsto \mathrm{Hom}(X; B)$ oraz $X \mapsto X^* \otimes B$;
- $X \mapsto \mathrm{Hom}(A; X)$ oraz $X \mapsto A^* \otimes X$.

(c) Załóżmy, że jeden z obiektów A lub B jest skończenie wymiarowy. Pokaż, że ϕ jest izomorfizmem.

(d) Załóżmy, że $\dim A < \infty$. Pokaż, że funktory $B \mapsto \mathrm{Hom}(A; B)$ oraz $B \mapsto A^* \otimes B$ są naturalnie izomorficzne.

(e) Załóżmy, że $\dim B < \infty$. Pokaż, że funktory $A \mapsto \mathrm{Hom}(A; B)$ oraz $A \mapsto A^* \otimes B$ są naturalnie izomorficzne.

20 Definicja. *Sumą prostą* obiektów P i Q nazwiemy uporządkowaną piątkę (V, f, ϕ, g, ψ), gdzie V jest obiektem, $f \in \mathrm{Hom}(V; P)$, $\phi \in \mathrm{Hom}(P; V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V; Q)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(Q; V)$ i spełnione są tożsamości

$$f \circ \phi = \mathrm{id}_P \,, \quad g \circ \psi = \mathrm{id}_Q \,, \quad \phi \circ f + \phi \circ g = \mathrm{id}_V \;.$$

Będziemy pisać $V = P \oplus Q$.

21 Uwaga. Łatwo sprawdzić, że operacja sumy prostej jest łączna i przemienna (w sensie istnienia naturalnego izomorfizmu). Jeśli $P_1, \ldots, P_k$ są obiektami będziemy pisać

$$\textstyle\bigoplus_{j=1}^k P_j = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_k \,.$$

22 Zadanie. Niech V będzie obiektem, $k, l \in \mathbf{N}$, $(\bigotimes^k V, \mu_k)$, $(\bigotimes^l V, \mu_l)$ i $(\bigotimes^{k+l} V, \mu_{k+l})$ będą iloczynami tensorowymi odpowiednio k, l i $k+l$ kopii obiektu V. Korzystając z izomorfizmów skonstruowanych w 18 pokaż, że istnieje dokładnie jedno dwuliniowe przekształcenie $\otimes : \mathrm{Hom}(\bigotimes^k V, \bigotimes^l V; \bigotimes^{k+l} V)$ takie, że

$$\mu_k(v_1, \ldots, v_k) \otimes \mu_l(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \mu_{k+l}(v_1, \ldots, v_{k+l}) \quad \text{dla } v_1, \ldots, v_{k+l} \in V \,.$$

23 Uwaga. Powyższy fakt pokazuje, że na sumie prostej $\bigotimes^* V = \bigoplus_{k=0}^\infty \bigotimes^k V$ można zdefiniować dwuliniową operację $\otimes \in \mathrm{Hom}(\bigotimes^* V, \bigotimes^* V; \bigotimes^* V)$ taką, że

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \otimes (v_{k+1} \otimes \cdots \otimes v_{k+l}) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{k+l} \quad \text{dla } v_1, \ldots, v_{k+l} \in V \,.$$

24 Zadanie. Niech (V, f, ϕ, g, ψ) będzie sumą prostą obiektów P i Q. Pokaż, że

$$V \otimes W = (P \otimes W) \oplus (Q \otimes W) \,,$$

tzn. że istnieją odpowiednie morfizmy F, G, Φ i Ψ takie, że $(V \otimes W, F, \Phi, G, \Psi)$ jest sumą prostą $P \otimes W$ i $Q \otimes W$.

Wskazówka. Można i należy skorzystać z 16.

25 Uwaga. Jeśli $\dim A < \infty$, to wybór bazy A indukuje (niekanoniczny) izomorfizm $A \simeq \bigoplus_{k=1}^{\dim A} \mathbf{R}$. Wnioskujemy stąd i z poprzedniego zadania, że jeśli $\dim A_i < \infty$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, to

$$\dim A_1 \otimes \cdots \otimes A_k = \textstyle\prod_{i=1}^k \dim A_i \,.$$

26 Definicja. *Algebrą* nazwiemy parę (A, μ), gdzie A jest obiektem, zaś $\mu \in \mathrm{Hom}(A, A; A)$.

- Jeśli dany jest rozkład na sumę prostą $A = \bigoplus_{i=0}^\infty A_i$ oraz $\mu[A_i \times A_j] \subseteq A_{i+j}$ dla $i, j \in \mathbf{N}$, to mówimy, że A jest *algebrą z gradacją*.

- Jeśli $\mu(a,b) = \mu(b,a)$ dla $a, b \in A$, to mówimy, że A jest *przemienna.*
- Jeśli $\mu(a, \mu(b,c)) = \mu(\mu(a,b), c)$ dla $a, b, c \in A$, to mówimy, że A jest *łączna.*
- Jeśli istnieje $e \in A$ taki, że $\mu(a,e) = a$ dla $a \in A$, to mówimy, że A jest *algebrą z jedynką.*
- Jeśli A jest algebrą z gradacją oraz $\mu(a,b) = (-1)^{kl}\mu(b,a)$ dla $a \in A_k$ i $b \in A_l$, to mówimy, że A jest *antyprzemienna.*

27 Definicja. Niech V będzie obiektem. Definiujemy *algebrę tensorową* $(\bigotimes^* V, \otimes)$, gdzie

$$\bigotimes\nolimits^* V = \bigoplus\nolimits_{k=0}^{\infty} \bigotimes\nolimits^k V \,,$$

zaś operacja $\otimes$ była zdefiniowana w 22.

28 Zadanie. Pokaż, że powyższa algebra jest łączną algebrą z gradacją i jedynką.

29 Zadanie. Niech V będzie obiektem, zaś $I \subseteq \bigotimes^* V$ będzie dwustronnym ideałem generowanym przez zbiór $\{x \otimes x : x \in V\} \subseteq \bigotimes^2 V$.

(a) Pokaż, że I rozkłada się na sumę prostą

$$I = \bigoplus\nolimits_{m=2}^{\infty} (\bigotimes\nolimits^m V \cap I) \,.$$

(b) Definiujemy *algebrę zewnętrzną*

$$\bigwedge\nolimits^* V = \bigotimes\nolimits^* V / I \,,$$

gdzie operacja mnożenia klas abstrakcji pochodzi od operacji $\otimes$ określonej na $\bigotimes^* V$.

Pokaż, że $\bigwedge^* V$ rozkłada się na sumę prostą

$$\bigwedge\nolimits^* V = \bigoplus\nolimits_{k=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits^k V \,,$$

gdzie

$$\bigwedge\nolimits^k V = \bigotimes\nolimits^k V / (I \cap \bigotimes\nolimits^k V) \,.$$

(c) Pokaż, że $\bigwedge^* V$ jest łączną i antyprzemienną algebrą z gradacją i jedynką. Mnożenie w tej algebrze oznaczamy symbolem $\wedge$.

30 Zadanie. Pokaż, że definicja $\bigwedge^k V$ z 29 pokrywa się z definicją potęgi zewnętrznej podaną w arkuszu 6.

31 Uwaga. Więcej na temat algebry zewnętrznej i tensorowej można znaleźć w pierwszym rozdziale znakomitej książki [Fed69].

Literatura

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. URL: `https://doi.org/10.1007/978-3-642-62010-2`,