Zakładamy, że $n, k, m \in \mathbf{N}$, $k, m \leqslant n$, Z jest przestrzenią liniową, $U, V \subseteq Z$ są otwarte, $\dim X = n = \dim Z$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : Z \times Z \to \mathbf{R}$ jest iloczynem skalarnym na Z, $e_1, \ldots, e_n$ jest bazą ortonormalną Z, $\mathbf{E} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \bigwedge^n Z$ zadaje orientację Z, $\beta : Z \to Z^*$ dane jest przez $\beta(u)v = \langle u, v\rangle$ dla $u, v \in Z$, $\omega_i = \beta(e_i)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, forma $x_i \in \Omega^0(U)$ dana jest przez $x_i(a) = \langle a, e_i\rangle$ dla $a \in U$ oraz $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbf{\Omega} = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$; mamy zatem $dx_i(a) = \omega_i$ dla każdego $a \in U$ oraz $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definicja (Gwiazdka Hodge'a)**.** Definiujemy izometrie liniowe

$$* : \bigwedge^k Z \to \bigwedge^{n-k} Z \quad \text{oraz} \quad * : \bigwedge^k Z^* \to \bigwedge^{n-k} Z^*\,,$$

wymagając by spełnione były następujące tożsamości

$$\xi \wedge *\eta = \langle \xi\,, \eta\rangle \mathbf{E} \quad \text{oraz} \quad \varphi \wedge *\psi = \langle \varphi\,, \psi\rangle \mathbf{\Omega} \quad \text{dla } \xi, \eta \in \bigwedge^k Z \text{ oraz } \varphi, \psi \in \bigwedge^k Z^*\,. \tag{1}$$

Definicja. Niech $M \subseteq N \subseteq U$, M i N będą rozmaitościami wymiaru m klasy C^1, $\partial M := \overline{M} \setminus M$ będzie rozmaitością wymiaru $m-1$ klasy C^1. Przez *zewnętrzny wektor normalny do M w punkcie $p \in \partial M$* rozumiemy jedyny wektor $\nu_M(p) \in Z$ spełniający

$$\|\nu_M(p)\| = 1\,, \quad \nu_M(p) \in T_p N\,, \quad \nu_M(p) \perp T_p \partial M$$

oraz dla każdej krzywej $\gamma \in C^1(\mathbf{R}, Z)$ spełniającej $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma'(0) = \nu_M(p)$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że

$$\gamma(t) \in Z \setminus M \quad \text{dla } t \in (0, \varepsilon)\,.$$

Twierdzenie (Stokesa)**.** *Niech M, N będą jak wyżej, τ zadaje orientację N, σ zadaje orientację ∂M, $\nu_M(p) \wedge \sigma(p) = \tau(p)$ dla $p \in \partial M$ (mamy zatem $\sigma(p) = *\nu_M(p)$; zob. zad 2). Wówczas*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega \quad \text{dla } \omega \in \Omega^{m-1}(U)\,.$$

Uwaga. Załóżmy, że $v_1, \ldots, v_m$ jest bazą $T_p N$, $\alpha \in \operatorname{Hom}(Z, \mathbf{R})$ spełnia $\alpha(v_1) = 1$ oraz $\alpha(v_i) = 0$ dla $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$, $v_2, \ldots, v_m$ rozpina $T_p \partial M$, $\tau(p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$. Wówczas $\sigma(p) = \tau(p) \llcorner \alpha = v_2 \wedge \cdots \wedge v_m$.

Definicja. Operator $\delta : \Omega^k(U) \to \Omega^{k-1}(U)$ dany jest wzorem $\delta = *d*$.

---

1. Pokaż, że własność (1) jednoznacznie definiuje operator $*$ na k-formach i k-wektorach, a ponadto
$$*e_\lambda = (-1)^N e_\sigma \quad \text{oraz} \quad *\,\omega_\lambda = (-1)^N \omega_\sigma\,,$$
o ile $\lambda \in \Lambda(n, k)$ i $\sigma \in \Lambda(n, n-k)$ są takie, że
$$\operatorname{im} \lambda \cup \operatorname{im} \sigma = \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{oraz} \quad N = \#\big\{(i, j) \in \operatorname{im} \lambda \times \operatorname{im} \sigma : i > j\big\}\,.$$

2. Pokaż, że dla dowolnych $\xi, \eta \in \bigwedge^k Z$ oraz $\phi \in \bigwedge^k Z^*$ zachodzą wzory
$$*\phi(*\eta) = \phi(\eta)\,, \quad **\xi = (-1)^{k(n-k)}\xi \quad \text{oraz} \quad \delta\delta = 0\,.$$

3. Niech $\phi_i \in \Omega^0(U)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \wedge dx_i \in \Omega^1(U)$. Wyznacz $\delta\phi \in \Omega^0(U)$.

4. Niech $g_i \in C^\infty(U)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $g \in C^\infty(U, \bigwedge^1 Z)$ będzie polem 1-wektorowym danym wzorem $g = \sum_{i=1}^n g_i \wedge e_i$, $f \in \Omega^0(U)$. Udowodnij, że *dywergencja* g wyraża się przez
$$\operatorname{div} g(x) = \operatorname{trace} \mathrm{d}g(x) = \delta(\beta \circ g)(x) = *d*(\beta \circ g)(x)\,;$$

laplasjan f wyraża się przez

$$\Delta f(x) = \operatorname{trace} \mathrm{d}^2 f(x) = \operatorname{div} \nabla f(x) = \delta d f(x) = {*d{*}df}(x)\,;$$

jeśli $n = 3$, to *rotacja* g wyraża się przez

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} g(x) = \beta^{-1}(*d(\beta \circ g)) &= (\langle \mathrm{d}g(x)e_2,\, e_3\rangle - \langle \mathrm{d}g(x)e_3,\, e_2\rangle)e_1 \\ &+ (\langle \mathrm{d}g(x)e_3,\, e_1\rangle - \langle \mathrm{d}g(x)e_1,\, e_3\rangle)e_2 \\ &+ (\langle \mathrm{d}g(x)e_1,\, e_2\rangle - \langle \mathrm{d}g(x)e_2,\, e_1\rangle)e_3\,. \end{aligned}$$

5. Niech $n = 3$, $M \subseteq Z$ będzie rozmaitością dwuwymiarową zorientowaną za pomocą wyboru ciągłego pola jednostkowych wektorów normalnych $\nu_M : M \to Z$, $g : M \to Z$ będzie polem wektorowym, zaś $\omega = \beta \circ f \in \Omega^1(M)$. Pokaż, że

$$\int_M \langle \operatorname{rot} g(x)\,, \nu_M(x)\rangle \, \mathrm{d}\ell_M(x) = \int_M d\omega\,.$$

6. [Twierdzenie Gaussa jako konsekwencja twierdzenia Stokesa] Niech $W \subseteq U$ będzie otwarty i ograniczony, $\overline{W} \subseteq U$, ∂W będzie rozmaitością klasy C^1. Korzystając z twierdzenia Stokesa pokaż, że

$$\int_W \operatorname{div} g(x)\, \mathrm{d}\ell_n(x) = \int_{\partial W} \langle g(x),\, \nu_W(x)\rangle \, \mathrm{d}\ell_{\partial W}(x) \quad \text{dla } g \in C^1(U, Z)\,.$$

7. Niech $f \in C^1(U)$ ma zwarty nośnik. Pokaż, że

$$\int_U \mathrm{d}f(x)v \, \mathrm{d}\ell_n(x) = 0 \quad \text{dla każdego } v \in Z\,.$$

8. Niech $g \in C^1(U, Z)$ będzie polem wektorowym na U. Wykaż, że

$$\operatorname{div} g(a) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\ell_n(\mathbf{B}(a,r))} \int_{\partial \mathbf{B}(a,r)} \langle g(x),\, \tfrac{x-a}{|x-a|}\rangle \, \mathrm{d}\ell_{\partial \mathbf{B}(a,r)}(x)\,.$$

Uwaga. Jeśli $g(x)$ interpretujemy fizycznie jako wektor prędkości cząsteczki pewnej substancji (albo elektronu) w punkcie x, to $\operatorname{div} g(a)$ jest liczbą, która wskazuje jak bardzo a jest *źródłem*, tzn. czy średnio z punktu a substancja wypływa, czy raczej jest tam zatrzymywana.

9. Niech pola wektorowe $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ i $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będą dane wzorami $g(x, y) = (-y, x)$ oraz $h(u, v, w) = (-v, u, w)$ dla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ i $(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$. Naszkicuj strzałki tych pól. Oblicz $\operatorname{div} g(0)$, $\operatorname{div} h(0)$, $\operatorname{rot} h(0)$.

10. Niech $W \subseteq Z$ będzie otwarty i taki, że ∂W jest rozmaitością klasy C^1, $g : Z \to Z$ będzie polem wektorowym klasy C^1 o zwartym nośniku, $F_t(z) = z + tg(z)$ dla $t \in \mathbf{R}$ i $z \in Z$. Wykaż, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że F_t jest dyfeomorfizmem dla $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a następnie oblicz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ell_n(F_t[W])\Big|_{t=0}\,.$$

11. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oraz $g : Z \to \mathbf{R}$ będą takie, że $g(z) = f(\|z\|)$ dla $z \in \mathbf{Z}$. Oblicz $\Delta g(z)$.

12. Niech $f, g \in C^2(U)$. Oblicz $\operatorname{div}(f \cdot \nabla g)$.

13. Niech $n \geqslant 3$, $K(x) = (n(n-2)\boldsymbol{\alpha}(n))^{-1}\|x\|^{2-n}$ dla $x \in Z$, zaś $g \in C^2(Z)$.

    (a) Oblicz $\Delta K(x)$ dla $x \in Z \setminus \{0\}$. (*Wskazówka.* Może się przydać zadanie 11).

    (b) Oblicz $\langle \nabla K(y),\, y \rangle$ dla $y \in Z$.

    (c) Oblicz $\int_{\partial \mathbf{B}(0,r)} f(x-y)\langle \nabla K(y),\, y/r\rangle \, \mathrm{d}\ell_{\partial \mathbf{B}(0,r)}(y)$.

    (d) Niech $u = K \star g$. Wyznacz Δu. Dlaczego $\Delta u \neq \Delta K \star g$?

    Wskazówka. Przedstaw $\Delta u(x)$ w postaci

$$\Delta u(x) = \lim_{r \downarrow 0} \int_{Z \setminus \mathbf{B}(x,r)} \Delta K(x-y) f(y) \, \mathrm{d}\ell_n(y) + \int_{\mathbf{B}(0,r)} K(y) \Delta f(x-y) \, \mathrm{d}\ell_n(y)\,.$$

    Następnie skorzystaj z zadania 12 oraz Twierdzenia Gaussa o dywergencji.