Zakładamy, że $k, l, m, n \in \mathbf{N}$, X, Y, Z są przestrzeniami liniowymi, Z jest wyposażona w iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\dim Z = \dim X = n$, $\dim Y < \infty$. Jeśli W jest przestrzenią liniową oraz $\dim W < \infty$, to korzystamy z naturalnego utożsamienia $(\bigwedge^k W)^* \simeq \bigwedge^k W^*$.

Definicja. Niech $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$. Wówczas $\bigwedge^k f \in \operatorname{Hom}(\bigwedge^k X, \bigwedge^k Y)$ scharakteryzowana jest przez

$$\textstyle\bigwedge^k f(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k) \quad \text{dla } v_1, \ldots, v_k \in X\,.$$

Uwaga. Ta sama definicja zaaplikowana do $f^* \in \operatorname{Hom}(Y^*, X^*)$ danej przez $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ dla $\alpha \in Y^*$ daje *przeciąganie form* $\bigwedge^k f^* \in \operatorname{Hom}(\bigwedge^k Y^*, \bigwedge^k X^*)$ dane przez

$$\textstyle\bigwedge^k f^*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \circ \bigwedge^k f \quad \text{dla } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in Y^*\,.$$

Definicja. Mówimy, że $\xi \in \bigwedge^k X$ jest *prosty* jeśli $\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ dla pewnych $v_1, \ldots, v_k \in X$.

Definicja. Dla $\xi \in \bigwedge^k X$ definiujemy *stowarzyszoną przestrzeń liniową* $T(\xi)$ wzorem

$$T(\xi) = \{v \in X : v \wedge \xi = 0\}\,.$$

Definicja. Niech $\beta \in \operatorname{Hom}(Z, Z^*)$ będzie dane wzorem $\beta(u)(v) = \langle u, v \rangle$. *Iloczyn skalarny na* $\bigwedge^k Z$ definiujemy wzorem

$$\langle \xi, \eta \rangle = \textstyle\bigwedge^k \beta(\xi)(\eta) \quad \text{dla } \xi, \eta \in \bigwedge^k Z\,.$$

Definicja. Niech $A \subseteq X$. Przez *pole k-wektorowe na A* rozumiemy każdą funkcję typu $A \to \bigwedge^k X$. *Formą różniczkową stopnia k na A* nazywamy każdą funkcję typu $A \to \bigwedge^k X^*$.

Uwaga. Jeśli $U \subseteq Z$ jest otwarty, to zbiór wszystkich gładkich form różniczkowych stopnia k na U oznaczamy symbolem $\Omega^k(U) = C^\infty(U, \bigwedge^k Z^*)$.

Definicja. Niech $l \geqslant 1$. Przez *rozmaitość zorientowaną wymiaru k w Z klasy C^l* rozumiemy parę (M, τ), gdzie M jest rozmaitością zanurzoną w Z wymiaru k i klasy C^l, zaś $\tau : M \to \bigwedge^k Z$ jest polem k-wektorowym na M klasy C^{l-1} spełniającym

$$\tau(x) \text{ jest prosty}\,, \quad \|\tau(x)\| = 1\,, \quad T(\tau(x)) = T_x M \quad \text{dla } x \in M\,.$$

Uwaga. Funkcja ciągła $\tau : M \to \bigwedge^k Z$ zadaje orientację na M wtedy i tylko wtedy gdy

$$\|\tau(x)\| = 1 \quad \text{oraz} \quad \tau(x) \wedge v = 0 \quad \text{dla } x \in M \text{ i } v \in T_x M\,.$$

Definicja. Niech (M, τ) będzie rozmaitością zorientowaną wymiaru k w Z, zaś $\phi : M \to \bigwedge^k Z^*$ będzie formą różniczkową stopnia k na M. Definiujemy całkę $\int_M \phi$ z ϕ po M wzorem

$$\textstyle\int_M \phi = \int_{(M,\tau)} \phi = \int \phi(p)(\tau(p))\, \mathrm{d}\ell_M(p)\,.$$

---

1. Niech $v_1, \ldots, v_n \in X$ oraz $\omega_1, \ldots, \omega_n \in X^*$ będą bazami dualnymi, tj. $\omega_i(v_i) = 1$ oraz $\omega_j(v_i) = 0$ dla $i \neq j$. Niech $\lambda \in \Lambda(n, k)$ oraz $u_1, \ldots, u_k \in X$. Pokaż, że wartość $\omega_\lambda(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k)$ jest równa wyznacznikowi kwadratowej macierzy utworzonej po wybraniu k-wierszy o numerach $\lambda(1), \ldots, \lambda(k)$ z prostokątnej macierzy powstałej z ustawionych pionowo wektorów $u_1, \ldots, u_k$ zapisanych w bazie uporządkowanej $(v_1, \ldots, v_k)$.

2. Dana jest baza $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni X oraz przekształcenie k-liniowe i antysymetryczne $f : X \times \cdots \times X \to Y$. Niech $\omega_1, \ldots, \omega_n \in X^*$ będzie bazą dualną do $v_1, \ldots, v_n$. Pokaż, że jeśli $u_1, \ldots, u_k \in X$, to

$$f(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{\lambda \in \Lambda(n,k)} \omega_\lambda(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) f(v_{\lambda(1)}, \ldots, v_{\lambda(k)}) .$$

3. Niech e_1, e_2, e_3 będą wektorami bazy standardowej $\mathbf{R}^3$. Wyznacz współrzędne 2-wektorów $(1, 2, 3) \wedge (3, 0, 5)$ oraz $(4, 2, 8) \wedge (1, -1, 1)$ w bazie $e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1$.

   Uwaga. Reprezentacja prostego k-wektora ξ w postaci $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ *nie jest* jednoznaczna!

4. Niech e_1, e_2, e_3, e_4 będą wektorami bazy standardowej $\mathbf{R}^4$. Pokaż, że 2-wektor $\xi = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ nie jest prosty.

   Wskazówka. Jeśli ξ jest prosty, to $\xi \wedge \xi = 0$.

5. Niech $v_1, \ldots, v_k \in X$ oraz $\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0$. Pokaż, że $T(\xi) = \operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

   Wskazówka. Uzupełnij układ $v_1, \ldots, v_k$ do bazy X.

6. Niech $n \geqslant 5$ i $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą X. Rozstrzygnij, czy prosty jest 3-wektor

$$\eta = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 + v_1 \wedge v_4 \wedge v_5 \in \textstyle\bigwedge^3 X .$$

   Wskazówka. Wyznacz $\dim T(\eta)$.

7. Niech $n = 2k$, zaś $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ będzie bazą X^*. Dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ oblicz $\omega \wedge \cdots \wedge \omega \in \bigwedge^{2j} X^*$ jeśli

$$\omega = \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \wedge \beta_i .$$

   Uwaga. Geometrycznie $\omega(a, b)$ daje sumę pól (liczonych ze znakiem zależnym od orientacji) rzutów równoległoboku rozpiętego na wektorach a i b na 2-wymiarowe płaszczyzny $\operatorname{lin}\{v_i, u_i\}$, gdzie $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n$ jest bazą dualną do $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Jest to tzw. *forma symplektyczna.*

8. Niech $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_k \in Z$ oraz $\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ i $\eta = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$. Pokaż, że

$$\langle \xi, \eta \rangle = \det(\langle v_i, u_j \rangle)_{i,j=1}^k .$$

   Uwaga. Wynika stąd, że $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ jeśli $u_i \in \operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_k\}^\perp$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Ponadto, jeśli $\xi = \eta$, to widzimy, że $\|\xi\|^2 = \langle \xi , \xi \rangle$ jest wyznacznikiem Grama wektorów $v_1, \ldots, v_k$.

9. Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą ortonormalną Z. Pokaż, że wówczas $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n, k)\}$ jest bazą ortonormalną $\bigwedge^k Z$.

10. Niech wektory $e_1, e_2, \dots, e_n$ tworzą bazę standardową $\mathbf{R}^n$. Definiujemy izomorfizm liniowy $* : \bigwedge^{n-1}\mathbf{R}^n \to \bigwedge^1\mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^n$ następująco

$$*(e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = e_1\,, \quad *(e_3 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_1) = e_2\,, \quad \dots\,, \quad *(e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}) = e_n\,.$$

Pokaż, że jeśli $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, to

$$*(u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1}) = u_1 \times \dots \times u_{n-1}$$
$$\text{czyli, że} \quad \langle w, *(u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1})\rangle = \det(w, u_1, \dots, u_{n-1}) \quad \text{dla } w \in \mathbf{R}^n\,.$$

11. Niech $M \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie rozmaitością zanurzoną wymiaru $(n-1)$ klasy C^1. Dana jest funkcja ciągła $\nu : M \to \mathbf{R}^n$ taka, że $\nu(x) \perp T_xM$ oraz $\|\nu(x)\| = 1$ dla $x \in M$. Definiujemy $\tau : M \to \bigwedge^{n-1}\mathbf{R}^n$ tak, by

$$*\tau(x) = \nu(x) \quad \text{dla } x \in M \quad \text{lub równoważnie} \quad \langle \nu(x), *\tau(x)\rangle = 1 \quad \text{dla } x \in M\,.$$

Pokaż, że (M, τ) jest rozmaitością zorientowaną.

12. Niech $U \subseteq \mathbf{R}^k$ będzie otwarty, $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ będzie parametryzacją pewnej rozmaitości M, $e_1, \dots, e_k$ będzie bazą standardową $\mathbf{R}^k$. Definiujemy $\tau : M \to \bigwedge^k\mathbf{R}^n$ wzorem

$$\tau(\varphi(x)) = \frac{\bigwedge^k \mathrm{D}\varphi(x)(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)}{|\det(\mathrm{D}\varphi(x)^* \circ \mathrm{D}\varphi(x))|^{1/2}}\,.$$

Pokaż, że (M, τ) jest rozmaitością zorientowaną.

13. Niech $M \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie rozmaitością k-wymiarową klasy C^1, $U \subseteq \mathbf{R}^k$, $V \subseteq \mathbf{R}^k$. Dane są dwie parametryzacje $\varphi : U \to M$ oraz $\psi : V \to M$ takie, że $M = \varphi[U] = \psi[V]$. Niech $f = \psi^{-1} \circ \varphi : U \to V$ i załóżmy, że $\det \mathrm{D}f(x) > 0$ dla $x \in U$. Pokaż, że

$$\frac{\bigwedge^k \mathrm{D}\psi(f(x))(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)}{|\det(\mathrm{D}\psi(f(x))^* \circ \mathrm{D}\psi(f(x)))|^{1/2}} = \frac{\bigwedge^k \mathrm{D}\varphi(x)(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)}{|\det(\mathrm{D}\varphi(x)^* \circ \mathrm{D}\varphi(x))|^{1/2}} \quad \text{dla } x \in U\,.$$

Uwaga. Załóżmy, że M ma atlas $\{\varphi_i^{-1} : V_i \to U_i\}_{i=1}^N$, gdzie $V_i \subseteq M$ oraz $U_i \subseteq \mathbf{R}^k$, o następującej własności: dla każdych $i, j \in \{1, \dots, N\}$ jeśli $\varphi_i[U_i] \cap \varphi_j[U_j] \neq \varnothing$ oraz $U_{i,j} = \varphi_i^{-1}[\varphi_j[U_j]]$, to $\det \mathrm{D}(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(x) > 0$ dla $x \in U_{i,j}$. Wówczas M jest orientowalna.

14. Niech $S = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ będzie sferą jednostkową. Pokaż, że S jest orientowalna, tzn. że istnieje ciągłe pole n-wektorowe $\tau : S \to \bigwedge^n\mathbf{R}^{n+1}$ takie, że $\tau(x)$ jest prostym, jednostkowym n-wektorem stowarzyszonym z T_xS dla $x \in S$.

Uwaga. Jeśli n jest parzysta (np. $n = 2$), to *twierdzenie o zaczesaniu sfery* mówi, że nie istnieje ciągłe nieznikające pole 1-wektorowe na S. W takim przypadku nie ma szans na wybranie w sposób ciągły baz (które zadawałyby orientację) dla przestrzeni stycznych na S. Niemniej, nieznikające pole n-wektorowe na S zawsze istnieje!

15. Niech e_1, e_2, e_3 będzie bazą standardową $\mathbf{R}^3$, $U \subseteq \mathbf{R}^3$ będzie otwarty. Niech $x, y, z : U \to \mathbf{R}$ będą funkcjami danymi przez

$$x(p) = \langle e_1, p\rangle\,, \quad y(p) = \langle e_2, p\rangle\,, \quad z(p) = \langle e_3, p\rangle \quad \text{dla } p \in U\,.$$

Definiujemy 1-formy różniczkowe $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ na U wzorami

$$\mathrm{d}x(p)u = \langle e_1, u\rangle\ , \quad \mathrm{d}y(p)u = \langle e_2, u\rangle\ , \quad \mathrm{d}z(p)u = \langle e_3, u\rangle \quad \text{dla } p \in U,\ u \in \mathbf{R}^3\,.$$

Niech

$$P = \Big\{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 : 1 < c < 2,\ c^2 = a^2 + b^2\Big\}\,,$$
$$\omega = \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \tfrac{1}{y}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \tfrac{1}{z}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,.$$

Pokaż, że P jest orientowalna, a ustalenie $\nu_P(3/2, 0, 3/2) = (-2^{-1/2}, 0, 2^{1/2})$ determinuje ciągłe pole $\nu_P : P \to \mathbf{R}^3$ jednostkowych wektorów normalnych, które zadaje orientację $\tau : P \to \bigwedge^2 \mathbf{R}^3$. Oblicz $\int_{(P,\tau)} \omega$.

Zadania dodatkowe

16. [*Grassmannian*] Definiujemy

$$\mathbf{G}_0(n,k) = \{\xi \in {\textstyle\bigwedge}^k \mathbf{R}^n : \xi \text{ jest prosty},\ \langle \xi, \xi\rangle = 1\}\,,$$
$$\mathbf{G}(n,k) = \{P \in \operatorname{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) : P \circ P = P,\ P^* = P,\ \operatorname{trace} P = k\}\,.$$

(a) Zauważ, że istnieje bijekcja (mnogościowa) między $\mathbf{G}(n,k)$, a zbiorem wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni $\mathbf{R}^n$.

(b) Zauważ, że istnieje bijekcja (mnogościowa) między $\mathbf{G}_0(n,k)$, a zbiorem wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni $\mathbf{R}^n$ z orientacją.

(c) Pokaż, że $\mathbf{G}_0(n,k)$ i $\mathbf{G}(n,k)$ są gładkimi, zwartymi rozmaitościami (bez brzegu) wymiaru $k(n-k)$.

(d) Pokaż, że przekształcenie $\pi : \mathbf{G}_0(n,k) \to \mathbf{G}(n,k)$ przyporządkowujące $\xi \in \mathbf{G}_0(n,k)$ rzut ortogonalny na $T(\xi)$ jest „na", jest lokalnie homeomorfizmem, a ponadto $\pi^{-1}\{P\}$ zawiera dwa elementy dla każdego $P \in \mathbf{G}(n,k)$ (zatem π jest *nakryciem* stopnia 2).

(e) Opisz równaniami przestrzeń styczną do $\mathbf{G}(n,k)$ w dowolnym punkcie P.

17. Niech $(\bigwedge^k X, \mu)$ będzie k-potęgą zewnętrzną X,

$$\mathbf{SL}(k) = \Big\{A \in \operatorname{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k) : \det A = 1\Big\}\,,$$

$\xi = \mu(v_1, \ldots, v_k) \neq 0$ dla pewnych $v_1, \ldots, v_k \in X$, $e_1, \ldots, e_k$ będzie bazą standardową $\mathbf{R}^k$, $j : \mathbf{R}^k \to X$ będzie takie, że $j(e_i) = v_i$. Pokaż, że

$$\mu(j \circ A(e_1), \ldots, j \circ A(e_k)) = \det(A)\xi \quad \text{dla każdego } A \in \operatorname{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k)\,.$$

Wywnioskuj, że jeśli $0 \neq \eta \in \bigwedge^k X$ jest prosty, to *włókno* $\mu^{-1}(\eta)$ jest homeomorficzne z $\mathbf{SL}(k)$.