W tym arkuszu zakładamy, że X, Y, Z, W są rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi oraz dane są liczby $d, k, l, m, n \in \mathbf{Z}$. Jeśli A jest rzeczywistą przestrzenią liniową, to *przestrzeń dualną* oznaczamy przez $A^* = \operatorname{Hom}(A; \mathbf{R})$.

Definicja. Niech $d \geqslant 1$, $\sigma \in \operatorname{Perm}(d)$ będzie permutacją zbioru $\{1, \ldots, d\}$, zaś N będzie liczbą par (i, j) takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant d$ ale $\sigma(i) > \sigma(j)$. Definiujemy $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^N$.

Uwaga. Jeśli A jest macierzą permutacji σ, to $\operatorname{sgn} \sigma = \det A$.

Definicja. Załóżmy, że $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_d$ jest iloczynem kartezjańskim rzeczywistych przestrzeni liniowych $Y_1, \ldots, Y_d$. Przekształcenie $f : Y \to Z$ nazywamy *d-liniowym* jeśli

$$f(y_1, \ldots, y_d) = \alpha f(y_1, \ldots, y_{j-1}, u, y_{j+1}, \ldots, y_d) + \beta f(y_1, \ldots, y_{j-1}, v, y_{j+1}, \ldots, y_d)$$

zawsze gdy $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $y_1 \in Y_1$, $\ldots$, $y_d \in Y_d$, $u, v \in Y_j$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ oraz $y_j = \alpha u + \beta v$.

Przestrzeń wszystkich takich przekształceń będziemy oznaczań przez $\operatorname{Hom}(Y_1, \ldots, Y_d; Z)$.

Definicja. Przekształcenie d-liniowe $f : Y \times \cdots \times Y \to Z$ nazwiemy *antysymetrycznym* jeśli

$$f(y_1, \ldots, y_d) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot f(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(d)}) \quad \text{dla } y_1, \ldots, y_d \in Y \text{ oraz } \sigma \in \operatorname{Perm}(d)\,.$$

W szczególności mamy $f(y_1, \ldots, y_d) = 0$ jeśli $y_i = y_j$ dla pewnych $i \neq j$.

Definicja. Mówimy, że para (W, μ) jest *d-tą potęgą zewnętrzną* Y jeśli $\mu : Y \times \cdots \times Y \to W$ jest d-liniowe i antysymetryczne oraz zachodzi następująca WŁASNOŚĆ UNIWERSALNA: dla każdego przekształcenia d-liniowego i antysymetrycznego $f : Y \times \cdots \times Y \to Z$ istnieje DOKŁADNIE JEDNO przekształcenie liniowe $\bar{f} : W \to Z$ takie, że $f = \bar{f} \circ \mu$.

$$\begin{tikzcd} Y \times \cdots \times Y \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\forall f"'] & W \arrow[d, dotted, "\exists! \bar{f}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Będziemy pisać

$$\textstyle\bigwedge^d Y = W \quad \text{oraz} \quad y_1 \wedge \cdots \wedge y_d = \mu(y_1, \ldots, y_d) \quad \text{dla } y_1, \ldots, y_d \in Y\,.$$

Uwaga. W szczególności $\bigwedge^0 Y = \mathbf{R}$, $\bigwedge^1 Y = Y$ oraz $\bigwedge^m Y = \{0\}$ o ile $m > n = \dim Y$.

Definicja. Przez $\Lambda(n, m)$ oznaczamy zbiór funkcji rosnących typu $\{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$.

---

1. Skonstruuj naturalny izomorfizm pomiędzy $\operatorname{Hom}(Y, Z; W)$ oraz $\operatorname{Hom}(Y; \operatorname{Hom}(Z; W))$.

2. Niech $A = \{f \in \operatorname{Hom}(Y, \ldots, Y; Z) : f \text{ jest antysymetryczne}\}$ będzie przestrzenią liniową wszystkich przekształceń d-liniowych antysymetrycznych. Skonstruuj naturalny izomorfizm pomiędzy A oraz $\operatorname{Hom}(\bigwedge^2 Y; Z)$.

   Uwaga. Przyjmując $Z = \mathbf{R}$ widzimy, że A jest naturalnie izomorficzna z przestrzenią dualną do $\bigwedge^d Y$, tzn. $A \simeq (\bigwedge^d Y)^*$. Jeśli $\dim Y < \infty$, to $\bigwedge^d Y$ jest naturalnie izomorficzna z A^*.

3. Pokaż, że jeśli (V, μ) oraz (W, ν) są d-tymi potęgami zewnętrznymi przestrzeni Y, to V i W są naturalnie izomorficzne.

4. Pokaż, że jeśli (W, μ) jest k-tą potęgą zewnętrzną X, to
   (a) obraz przekształcenia μ rozpina całą przestrzeń W;
   (b) jeśli $\dim X = n$ i $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą X, to wektory $\mu(v_{\lambda(1)}, \ldots, v_{\lambda(k)}) \in W$ odpowiadające $\lambda \in \Lambda(n, k)$ są liniowo niezależne.

5. Niech $\dim X = n$ oraz $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą X. Niech W będzie przestrzenią liniową rozpiętą na zbiorze $\Lambda(n, k)$, tzn. W jest przestrzenią liniową wymiaru $\binom{n}{k} = \#\Lambda(n, k)$ z bazą $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n, k)\}$. Dla $\lambda \in \Lambda(n, k)$ kładziemy $\mu(v_{\lambda(1)}, \ldots, v_{\lambda(k)}) = v_\lambda \in W$.

   Pokaż, że μ rozszerza się jednoznacznie do przekształcenia k-liniowego i antysymetrycznego $\mu : X \times \cdots \times X \to W$ oraz (W, μ) jest k-tą potęgą zewnętrzną X.

6. Niech $\dim X = n$, $l, k \in \mathbf{N} \cap [0, n]$ oraz $l + k \leqslant n$. Pokaż, że istnieje dwuliniowe przekształcenie $f : \bigwedge^k X \times \bigwedge^l X \to \bigwedge^{k+l} X$ takie, że

$$f(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_{l+k}) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{l+k} \quad \text{dla } v_1, \ldots, v_{l+k} \in X\,.$$

   Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą X. Załóżmy, że

$$\xi = \textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda(n,k)} \xi_\lambda v_\lambda \in \bigwedge^k X \quad \text{oraz} \quad \eta = \textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda(n,l)} \eta_\lambda v_\lambda \in \bigwedge^l X\,.$$

   Znajdź współrzędne $(k + l)$-wektora $f(\xi, \eta)$ w bazie $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n, k + l)\}$.

   Uwaga. $(k + l)$-wektor $f(\xi, \eta)$ będziemy oznaczać symbolem $\xi \wedge \eta$. Mamy

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi\,.$$

   Uwaga. Można myśleć, że $\bigwedge^k X$ to po prostu zbiór wszystkich napisów postaci

$$\textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda(n,k)} \alpha_\lambda v_\lambda \quad \text{gdzie } \alpha_\lambda \in \mathbf{R}$$

   z naturalnie zdefiniowanymi operacjami liniowymi. Ponadto na sumie prostej wszystkich $\bigwedge^l X$ dla $l = 0, 1, \ldots, n$, tzn. na $\bigwedge^* X = \bigoplus_{l=0}^n \bigwedge^l X$, mamy zdefiniowaną dodatkową operację mnożenia $\wedge$ spełniającą $v \wedge v = 0$ dla $v \in X = \bigwedge^1 X$. To nadaje przestrzeni liniowej $\bigwedge^* X$ strukturę algebry zwanej *algebrą zewnętrzną przestrzeni* X.

7. Niech $X = \mathbf{R}^3$, e_1, e_2, e_3 będzie bazą standardową $\mathbf{R}^3$. Znajdź współrzędne 2-wektora $(1, 1, 0) \wedge (-1, 1, 0)$ w bazie $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$.

8. Skonstruuj naturalny monomorfizm $\bigwedge^2 Y^* \to \operatorname{Hom}(\bigwedge^2 Y; \mathbf{R}) = (\bigwedge^2 Y)^*$

   Wskazówka. Skorzystaj z zadania 2.

   Uwaga. Jeśli $\dim Y = \infty$, to powyższe przekształcenie nie jest izomorfizmem.

9. Niech $k+l \leqslant n = \dim X$, $\alpha : X \times \cdots \times X \to \mathbf{R}$ będzie k-liniowe i antysymetryczne, zaś $\beta : X \times \cdots \times X \to \mathbf{R}$ będzie l-liniowe i antysymetryczne. Dla $x_1, \ldots, x_{k+l} \in X$ definiujemy

$$(1) \qquad \zeta(x_1, \ldots, x_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(k,l)} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \alpha(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) \beta(x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(k+l)}) \,,$$

gdzie $\mathrm{Sh}(k,l)$ oznacza zbiór permutacji σ zbioru $\{1, \ldots, k+l\}$ takich, że σ jest rosnąca na każdym ze zbiorów $\{1, \ldots, k\}$ oraz $\{k+1, \ldots, k+l\}$.

(a) Pokaż, że przekształcenie ζ jest $(k+l)$-liniowe i antysymetryczne.

Wskazówka. Zachodzi wzór $\alpha(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\eta \in \mathrm{Perm}(k)} (\operatorname{sgn} \eta) \cdot \alpha(x_{\eta(1)}, \ldots, x_{\eta(k)})$.

Uwaga. Z zadania 2 otrzymujemy przekształcenia liniowe $\bar{\alpha} \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X; \mathbf{R})$, $\bar{\beta} \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^l X; \mathbf{R})$ oraz $\bar{\zeta} \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^{k+l} X; \mathbf{R})$. Będziemy utożsamiać α i β z $\bar{\alpha}$ i $\bar{\beta}$, zaś zdefiniowane wyżej przekształcenie ζ będziemy oznaczać $\alpha \wedge \beta$.

(b) Pokaż, że wzór (1) indukuje dwuliniowe przekształcenie $\wedge : \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X; \mathbf{R}) \times \mathrm{Hom}(\bigwedge^l X; \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}(\bigwedge^{l+k} X; \mathbf{R})$ oraz

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{lk} \beta \wedge \alpha \,.$$

(c) Pokaż, że jeśli $p+q+r \leqslant n$, $\alpha \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^p X; \mathbf{R})$, $\beta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^q X; \mathbf{R})$, $\gamma \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^r X; \mathbf{R})$, to $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

(d) Pokaż, że jeśli $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathrm{Hom}(X; \mathbf{R}) = \mathrm{Hom}(\bigwedge^1 X; \mathbf{R})$ oraz $v_1, \ldots, v_k \in X$, to

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(k)} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \omega_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \omega_k(v_{\sigma(k)}) \,.$$

10. Niech $\dim X = n$, zaś $v_1, \ldots, v_n \in X$ oraz $\omega_1, \ldots, \omega_n \in X^*$ będą bazami dualnymi, tzn.

$$\omega_i(v_i) = 1 \quad \text{oraz} \quad \omega_i(v_j) = 0 \quad \text{dla } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ oraz } i \neq j \,.$$

Dla $\lambda \in \Lambda(n,k)$ kładziemy

$$v_\lambda = v_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\lambda(k)} \in \bigwedge^k X \quad \text{oraz} \quad \omega_\lambda = \omega_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\lambda(k)} \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X; \mathbf{R}) \,.$$

Pokaż, że $\omega_\lambda(v_\lambda) = 1$ oraz $\omega_\lambda(v_\sigma) = 0$ jeśli $\lambda \neq \sigma$. Wywnioskuj, że $\{\omega_\lambda : \lambda \in \Lambda(n,k)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{Hom}(\bigwedge^k X; \mathbf{R})$ dualną do bazy $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n,k)\} \subseteq \bigwedge^k X$.

11. Niech $k \in \mathbf{Z} \cap [0,n]$, $\dim X = n$, $(\bigwedge^k X^*, \mu)$ będzie k-tą potęgą zewnętrzną X^*. Skonstruuj izomorfizm liniowy

$$f : \bigwedge^k X^* \to (\bigwedge^k X)^* = \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X; \mathbf{R})$$

taki, że

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = f(\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)) \quad \text{dla } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in X^* \,.$$

Uwaga. Widzimy zatem, że $(\mathrm{Hom}(\bigwedge^k X; \mathbf{R}), \wedge)$ jest jedną z możliwych (izomorficznych) realizacji k-tej potęgi zewnętrznej X^*.

12. Pokaż, że dla każdego $f \in \mathrm{Hom}(Z;Y)$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\bigwedge^k f : \bigwedge^k Z \to \bigwedge^k Y$ takie, że dla wszystkich $v_1, \ldots, v_k \in Z$ zachodzi
$$\textstyle\bigwedge^k f(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \mu(f(v_1), \ldots, f(v_k)) = f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k)\,.$$
13. Niech $f \in \mathrm{Hom}(W;Y)$, $g \in \mathrm{Hom}(Z;W)$. Pokaż, że $\bigwedge^k(f \circ g) = \bigwedge^k f \circ \bigwedge^k g$.
14. Niech $\dim X = n$ oraz $f \in \mathrm{Hom}(X;X)$. Pokaż, że
$$\textstyle\bigwedge^n f(v) = \det(f) \cdot v \quad \text{dla każdego } v \in \bigwedge^n X \simeq \mathbf{R}\,.$$
Wywnioskuj, że jeśli $g \in \mathrm{Hom}(X;X)$, to
$$\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)\,.$$

Przypomnienie kilku faktów z GALu

Definicja. Jeśli $f \in \mathrm{Hom}(Y;Z)$, to definiujemy $f^* \in \mathrm{Hom}(Z^*;Y^*)$ wzorem
$$f^*(\alpha) = \alpha \circ f \quad \text{dla } \alpha \in Z^*\,.$$

Uwaga. Istnieje naturalny monomorfizm $\mathrm{ev} : X \to X^{**}$ (*ewaluacja*) zadany przez
$$\mathrm{ev}(v)(\phi) = \phi(v) \quad \text{dla } v \in X \text{ oraz } \phi \in X^*\,.$$
W przypadku gdy $\dim X = n < \infty$, ewaluacja jest naturalnym izomorfizmem. Jednak trudno wypisać przekształcenie odwrotne bez wybrania bazy. Wybierzmy bazy dualne $v_1, \ldots, v_n \in X$ i $\omega_1, \ldots, \omega_n \in X^*$. Wtedy
$$\mathrm{ev}^{-1}(\Phi) = \textstyle\sum_{i=1}^n \Phi(\omega_i) v_i \quad \text{dla } \Phi \in X^{**}\,.$$

Definicja. Załóżmy, że $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$ oraz X i Y wyposażone są w iloczyny skalarne $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_X$ i $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_Y$.

1. Przestrzeń $X^* = \mathrm{Hom}(X;\mathbf{R})$ jest naturalnie izomorficzna z X przez izomorfizm $X \to X^*$ przyporządkowujący wektorowi $v \in X$ funkcjonał $\omega_v \in X^*$ taki, że $\omega_v(v) = 1$ oraz $\ker \omega_v = \mathrm{lin}\{v\}^\perp$.

   Uwaga. Powyższy izomorfizm jest *naturalny* pomiędzy przestrzeniami z iloczynem skalarnym, tzn. nie zależy od żadnych wyborów poza tymi, które i tak zostały już dokonane.
2. Jeśli $f \in \mathrm{Hom}(X;Y)$, to definiujemy $f^* \in \mathrm{Hom}(Y;X)$ poprzez warunek
$$\langle u,\, f(v)\rangle_Y = \langle f^*(u),\, v\rangle_X \quad \text{dla } u, v \in Y\,.$$
3. Dwie definicje f^* pokrywają się przy naturalnym utożsamieniu X z X^* oraz Y z Y^*.
4. Przestrzeń liniową $\mathrm{Hom}(X;Y)$ wyposażamy w iloczyn skalarny wzorem
$$\langle f,\, g\rangle = \mathrm{trace}(f^* \circ g) \quad \text{dla } f, g \in \mathrm{Hom}(X;Y)\,.$$

5. Iloczyn wektorowy $w_1 \times \cdots \times w_{n-1} \in X$ wektorów $w_1, \ldots, w_{n-1} \in X$ scharakteryzowany jest przez własność

$$\langle w, w_1 \times \cdots \times w_{n-1} \rangle_X = \det(w, w_1, \ldots, w_{n-1}) \quad \text{dla } w \in X\,.$$

Definicja. Niech $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\dim X = n$ oraz X będzie wyposażona w iloczyn skalarny. Definiujemy $\beta : X \to X^*$ oraz $\gamma_k : \bigwedge^k X \to \bigwedge^k X^*$ wzorami $\beta(x)(y) = \langle x\,, y\rangle$ dla $x, y \in X$ oraz $\gamma_k = \bigwedge^k \beta$; cf. 12. Niech $j_k : \bigwedge^k X^* \to (\bigwedge^k X)^*$ będzie naturalnym izomorfizmem zdefiniowanym w 11. Na $\bigwedge^k X$ wprowadzamy formę dwuliniową

$$\langle \xi\,, \eta \rangle = j_k \circ \gamma_k(\xi)(\eta) \quad \text{dla } \xi, \eta \in \textstyle\bigwedge^k X\,.$$

Definicja. Elementy $\bigwedge^k X$ będziemy nazywać *k-wektorami.* Elementy $\bigwedge^k X^*$ będziemy nazywać *k-formami.* Jeśli k-wektor ξ jest postaci $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ dla pewnych $v_1, \ldots, v_k \in X$, to mówimy, że ξ jest *prosty.* Z każdym k-wektorem $\xi \in \bigwedge^k X$ stowarzyszamy podprzestrzeń liniową $T(\xi) \subseteq X$ wzorem

$$T(\xi) = \{v \in X : \xi \wedge v = 0\}\,.$$

---

15. Niech $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant \dim X = n \in \mathbf{Z}$, X będzie wyposażona w iloczyn skalarny, zaś $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą ortonormalną X.

    (a) Pokaż, że zdefiniowana wyżej forma dwuliniowa $\langle \cdot\,, \cdot \rangle \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X, \bigwedge^k X; \mathbf{R})$ jest iloczynem skalarnym.

    (b) Pokaż, że układ k-wektorów $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n,k)\}$ jest bazą ortonormalną $\bigwedge^k X$.

16. Niech $0 \leqslant k \leqslant n = \dim X$, X będzie wyposażona w iloczyn skalarny, $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą ortonormalną X, $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbf{R}$ dla $i \in \mathbf{N} \cap [0,k]$ i $j \in \mathbf{N} \cap [0,n]$. Kładziemy $a_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j$ oraz $b_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} v_j$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Oblicz

$$\langle a_1 \wedge \cdots \wedge a_k\,, b_1 \wedge \cdots \wedge b_k \rangle\,.$$

17. Niech X i Z będą wyposażone w iloczyny skalarne, $\dim Z = k \leqslant \dim X = n$, $v_1, \ldots, v_k$ będzie bazą ortonormalną Z, $f \in \mathrm{Hom}(Z; X)$. Pokaż, że

$$\begin{aligned} \det(f^* \circ f)^{1/2} &= \|\textstyle\bigwedge^k f\|_2 = \langle \bigwedge^k f, \bigwedge^k f \rangle^{1/2} \\ &= \|\textstyle\bigwedge^k f\|_\infty = \sup\Big\{ \|\bigwedge^k f(\xi)\|_2 : \xi \in \bigwedge^k Z\,, \|\xi\|_2 = 1 \Big\} = \|f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k)\|_2\,. \end{aligned}$$

    Uwaga. Mamy tu ciekawą interpretację wyznacznika Grama f.

18. Niech $\xi \in \bigwedge^k X$ oraz $\xi \neq 0$. Pokaż, że $m = \dim T(\xi) \leqslant k$ oraz jeśli $e_1, \ldots, e_m \in X$ rozpinają $T(\xi)$, to istnieje $(k-m)$-wektor $\zeta \in \bigwedge^{k-m} X$ taki, że

$$\xi = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge \zeta\,.$$

    Wywnioskuj, że

(a) $0 \neq \xi \in \bigwedge^k X$ jest prosty wtedy i tylko wtedy gdy $\dim T(\xi) = k$;

(b) jeśli $\xi, \zeta \in \bigwedge^k X \setminus \{0\}$ są proste, to $T(\xi) = T(\zeta)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\xi = c\zeta$ dla pewnej liczby $c \in \mathbf{R}$;

(c) jeśli $0 \neq \xi \in \bigwedge^k X$ oraz $0 \neq \zeta \in \bigwedge^l X$ są proste, to $\xi \wedge \eta \neq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $T(\xi) \cap T(\zeta) = \{0\}$ oraz $T(\xi) + T(\zeta) = T(\xi \wedge \zeta)$;

(d) jeśli $\xi \in \bigwedge^k X$ oraz $\zeta \in \bigwedge^l X$ są proste, to $T(\xi) \subseteq T(\zeta)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\eta \in \bigwedge^{l-k} X$ taki, że $\zeta = \xi \wedge \eta$.

19. [*Kontrakcje*] Niech $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n = \dim X$. Udowodnij, że istnieją dwuliniowe przekształcenia

$$\lrcorner : \textstyle\bigwedge^p X \times (\bigwedge^q X)^* \to (\bigwedge^{q-p} X)^* ,$$
$$\llcorner : \textstyle\bigwedge^q X \times (\bigwedge^p X)^* \to \bigwedge^{q-p} X ,$$

spełniające

$$(\eta \lrcorner \phi)(\xi) = \phi(\xi \wedge \eta) \quad \text{dla } \xi \in \textstyle\bigwedge^{q-p} X,\ \eta \in \bigwedge^p X,\ \phi \in (\bigwedge^q X)^* ,$$
$$\beta(\zeta \llcorner \alpha) = (\alpha \wedge \beta)(\zeta) \quad \text{dla } \zeta \in \textstyle\bigwedge^q X,\ \alpha \in (\bigwedge^p X)^*,\ \beta \in (\bigwedge^{q-p} X)^* .$$

Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą X, zaś $\omega_1, \ldots, \omega_n$ będzie dualną bazą X^*. Znajdź postać $\eta \lrcorner \phi$ oraz $\zeta \llcorner \alpha$ wyrażoną w bazach $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n, q-p)\}$ i $\{\omega_\lambda : \lambda \in \Lambda(n, q-p)\}$.

Wskazówka. Jeśli $f \in \mathrm{Hom}(V; W)$, to przekształcenie $f^* \in \mathrm{Hom}(W^*; V^*)$ dane jest wzorem $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$. Rozważ $f_\eta : \bigwedge^{q-p} X \to \bigwedge^q X$ dane wzorem $f_\eta(\xi) = \xi \wedge \eta$. Do konstrukcji $\llcorner$ można skorzystać z naturalnego izomorfizmu $\bigwedge^q X \simeq (\bigwedge^q X)^{**}$.

Definicja. [*Gwiazdka Hodge'a*] Niech $\dim X = n$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, X będzie wyposażona w iloczyn skalarny $\langle \cdot , \cdot \rangle$ oraz orientację $E \in \bigwedge^n X$ spełniającą $\langle E, E \rangle = 1$, zaś $\gamma_k = \bigwedge^k \beta$, gdzie $\beta : X \to X^*$ dana jest przez $\beta(u)(v) = \langle u , v \rangle$ dla $u, v \in X$. Definiujemy izomorfizmy liniowe

$$* : \textstyle\bigwedge^k X \to \bigwedge^{n-k} X \quad \text{oraz} \quad * : \bigwedge^k X^* \to \bigwedge^{n-k} X^* ,$$

wzorami

$$*\xi = E \llcorner \gamma_k(\xi) \quad \text{dla } \xi \in \textstyle\bigwedge^k X , \quad *\phi = \gamma_{n-k}(E \llcorner \phi) \quad \text{dla } \phi \in \bigwedge^k X^* .$$

---

20. Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą ortonormalną X, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ będzie dualną bazą X^*, $E = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ zadaje orientację na X. Pokaż, że

$$*v_\lambda = (-1)^N v_\sigma \quad \text{oraz} \quad * \omega_\lambda = (-1)^N \omega_\sigma ,$$

gdzie $\lambda \in \Lambda(n, k)$, $\sigma \in \Lambda(n, n-k)$ są takie, że $\mathrm{im}\,\lambda \cup \mathrm{im}\,\sigma = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz N jest liczbą par $(i, j) \in \mathrm{im}\,\lambda \times \mathrm{im}\,\sigma$ takich, że $i > j$.

21. Niech $\dim X = n$, X będzie wyposażona w iloczyn skalarny, zaś $w_1, \dots, w_{n-1} \in X$. Pokaż, że
$$*(w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-1}) = w_1 \times \cdots \times w_{n-1} \in X\,.$$

22. Niech $v_1, \dots, v_n$, $\omega_1, \dots, \omega_n$ będą jak w poprzednim zadaniu, $\xi, \eta \in \bigwedge^k X$, $\phi, \psi \in \bigwedge^k X^*$. Pokaż, że
$$\xi \wedge *\eta = \langle \xi,\, \eta \rangle v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\,, \quad \phi \wedge *\psi = \langle \phi,\, \psi \rangle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n\,,$$
$$\phi(\xi) = *\phi(*\xi)\,, \quad *\phi(\eta) = (-1)^{k(n-k)}\phi(*\eta)\,.$$

23. Niech $0 \neq \xi \in \bigwedge^k X$ będzie prosty. Pokaż, że
$$T(\xi)^{\perp} = T(*\xi)\,.$$