Definicja. *(Miara powierzchniowa)* Niech $M \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie rozmaitością zanurzoną klasy C^k wymiaru m, zbiór I będzie co najwyżej przeliczalny, $V_i \subseteq \mathbf{R}^m$ będzie otwarty dla $i \in I$, $\psi_i \in C^k(V_i, \mathbf{R}^n)$ dla $i \in I$, $M \subseteq \bigcup_{i \in I} \psi_i[V_i]$, $M_i = M \cap \psi_i[V_i] \setminus \bigcup_{j<i} \psi_j[V_j]$ dla $i \in I$. Miara ℓ_M zbioru borelowskiego $A \subseteq M$ dana jest przez

$$\ell_M(A) = \textstyle\sum_{i \in I} \int_{\psi_i^{-1}[M_i \cap A]} \mathrm{Vol}_{\psi_i}(x)\,\mathrm{d}\ell_m(x)\,, \quad \text{gdzie} \quad \mathrm{Vol}_{\psi_i}(x) = \det\big(\mathrm{d}\psi_i(x)^* \circ \mathrm{d}\psi_i(x)\big)^{1/2}\,.$$

Twierdzenie. *(Wzór Cauchy'ego–Bineta) Niech $m, n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant n$, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, $B \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$ będzie bazą $\mathbf{R}^n$, $(v_1, \ldots, v_m)$ będzie bazą $\mathbf{R}^m$, S będzie zbiorem wszystkich funkcji rosnących typu $\{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, $j_s \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ będzie dana przez $j_s(v_i) = u_{s(i)}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $s \in S$. Wówczas*

$$\det(B \circ A) = \textstyle\sum_{s \in S} \det(B \circ j_s) \cdot \det(j_s^* \circ A)\,.$$

---

1. Niech $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leqslant n$, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$, $B \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$, $I \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k)$ będą takie, że $I(x) = x$ dla $x \in \mathbf{R}^k$ oraz $B \circ A = I$. Pokaż, że istnieje izometryczne włożenie $j \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ takie, że $j \circ j^* \circ A = A$. Wywnioskuj, że

$$\det(A^* \circ A) = \det(j^* \circ A)^2 \quad \text{oraz} \quad \det(B \circ B^*)\det(A^* \circ A) = 1\,.$$

   Uwaga. Jest to część dowodu, że definicja miary powierzchniowej nie zależy od wyboru parametryzacji.

2. Niech przekształcenie $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ będzie samosprzężone (tj. $A^* = A$) oraz takie, że przekształcenie dwuliniowe $(u, v) \mapsto \langle u, Av \rangle$ dla $u, v \in \mathbf{R}^n$ jest nieujemnie określone. Rozstrzygnij, czy musi istnieć $B \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ takie, że $A = B^* \circ B$?

3. Oblicz długość okręgu $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ korzystając z definicji miary powierzchniowej oraz dwóch różnych parametryzacji:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{dla } t \in (0, 2\pi)\,;$$
$$\psi_1(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}) \quad \text{i} \quad \psi_1(t) = (t, -\sqrt{1 - t^2}) \quad \text{dla } t \in (-1, 1)\,.$$

4. Oblicz długość krzywej $C = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in (0, 4\pi)\}$. Następnie oblicz całkę $\int f\,\mathrm{d}\ell_C$ dla $f(x, y, z) = \cos z$ oraz $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

5. Oblicz pole powierzchni $S = \{(r\cos t, r\sin t, t) : r \in (0, 1),\ t \in (0, 4\pi)\}$.

6. Rozważmy funkcję $\Phi : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbf{R}^3$ daną wzorem

$$\Phi(u, v) = \big((1 + \tfrac{v}{2}\cos\tfrac{u}{2})\cos u,\ (1 + \tfrac{v}{2}\cos\tfrac{u}{2})\sin u,\ \tfrac{v}{2}\sin\tfrac{u}{2}\big)\,.$$

   Udowodnij, że Φ jest parametryzacją pewnej rozmaitości wymiaru 2. Następnie oblicz pole tej powierzchni (jeśli się da). Co to za rozmaitość?

7. Znajdź miarę zbioru

$$\big\{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbf{R}^{n+1} : y = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\big\}\,.$$

8. Niech $a \in (0, \infty)$. Znajdź pole powierzchni opisnej wzorem

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : az = xy,\ x^2 + y^2 \leqslant a^2\big\}\,.$$

9. Oblicz całkę $\int f \, \mathrm{d}\ell_M$, gdzie

$$M = \big\{(t, \tfrac{2}{3}t^{3/2}, t) : t \in [1,2]\big\} \quad \text{oraz} \quad f(x,y,z) = \frac{x+y}{y+z}\,.$$

10. Niech $C \subseteq \mathbf{R}^2$ będzie rozmaitością wymiaru 1 klasy C^1 oraz $f : C \to \mathbf{R}$ będzie funkcją dodatnią i ciągłą. Wykaż, że zbiór

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x,y) \in C,\, 0 < z < f(x,y)\big\}$$

jest rozmaitością klasy C^1 wymiaru 2 oraz

$$\ell_S(S) = \int f \, \mathrm{d}\ell_C\,.$$

11. Niech $K \subseteq \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ będzie rozmaitością zanurzoną klasy C^1 wymiaru 1 i niech $\tau(v)$ oznacza jednostkowy wektor styczny do K w punkcie v (jeden z dwóch możliwych; bez znaczenia który). Załóżmy ponadto, że

$$|\langle \tau(v),\, v\rangle| < \|v\| \quad \text{oraz} \quad \{tv : t \in (0,\infty)\} \cap K = \{v\} \quad \text{dla } v \in K\,.$$

Definiujemy zbiór C wzorem

$$C = \big\{tv : v \in K,\, t \in (0,1)\big\}\,.$$

Wykaż, że C jest rozmaitością klasy C^1 wymiaru 2 oraz zachodzi wzór

$$\ell_C(C) = \frac{1}{2} \int \|v \times \tau(v)\| \, \mathrm{d}\ell_K(v)\,.$$

Zadania dodatkowe

12. Niech $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $I \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ będzie dana przez $I(x) = x$ dla $x \in \mathbf{R}^n$. Pokaż, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że funkcja $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(t) = \det(I + tA)$ jest dobrze określona i klasy C^∞. Następnie udowodnij, że

$$f'(0) = \operatorname{trace} A\,.$$

13. Niech $a, b, c, d \in \mathbf{R}^3$ będą takie, że układ wektorów $(b-a, c-a, d-a)$ jest liniowo niezależny. Wówczas istnieje dokładnie jedna sfera dwuwymiarowa S zawierająca wszystkie punkty a, b, c i d. Pokaż, że $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \|x\|^2 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \|d\|^2 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \|c\|^2 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \|b\|^2 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \|a\|^2 & 1 \end{bmatrix} = 0\,.$$