**Definicja.** Niech $1 \leqslant p < \infty$. Dla funkcji $\ell_n$-mierzalnej $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definiujemy

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\ell_n\right)^{1/p} \quad \text{oraz} \quad \|f\|_\infty = \inf\{t \in \mathbf{R} : \ell_n(\{x \in \mathbf{R}^n : |f(x)| > t\}) = 0\}\,.$$

Przestrzeń $\mathbf{L}_p(\ell_n)$ to zbiór funkcji $\ell_n$-mierzalnych $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ takich, że $\|f\|_p < \infty$.

**Twierdzenie** (cf. [SG77, §6.9, Theorem 7], [Fed69, 2.4.12], [Bou04, IV.3], [DS88, II.6.6])**.** *Dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ funkcja $\|\cdot\|_p$ jest półnormą na $\mathbf{L}_p(\ell_n)$, a po utożsamieniu funkcji różniących się na zbiorze $\ell_n$-miary zero $\mathbf{L}_p(\ell_n)$ staje się przestrzenią Banacha, tj. zupełną unormowaną przestrzenią liniową.*

**Definicja.** Niech $f, g \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$. Definiujemy *splot* $f \star g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kładąc

$$f \star g(x) = \int f(y) g(x - y) \, \mathrm{d}\ell_n(y)\,.$$

**Definicja.** Niech $f \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$. Definiujemy zbiór domknięty $\operatorname{spt} f \subseteq \mathbf{R}^n$, zwany *nośnikiem funkcji* $f$, wzorem

$$\operatorname{spt} f = \mathbf{R}^n \setminus \bigcup\{U : U \subseteq \mathbf{R}^n \text{ jest otwarty oraz } \textstyle\int_U f \, \mathrm{d}\ell_n = 0\}\,.$$

**Definicja.** Symbolem $C^k_c(\mathbf{R}^n)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ klasy $C^k$ takich, że nośnik $f$ jest zwarty.

**Twierdzenie** (cf. [Str16, §5.5.1])**.** *Załóżmy, że $f, g \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\varphi \in C^k_c(\mathbf{R}^n)$ jest nieujemna,* $\operatorname{spt} \varphi \subseteq \mathbf{B}(0,1)$, $\int \varphi \, \mathrm{d}\ell_n = 1$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ *dla $x \in \mathbf{R}^n$ i $\varepsilon \in (0, \infty)$. Wówczas*

1. $f \star g \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$;
2. $\|f \star g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$;
3. $f \star g = g \star f$;
4. $\varphi \star f \in C^k(\mathbf{R}^n)$ *przy czym* $\mathrm{d}(f \star \varphi)(x)u = f \star (\mathrm{d}\varphi(\cdot)u)(x)$ *dla* $x, u \in \mathbf{R}^n$;
5. $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|\varphi_\varepsilon \star f - f\|_1 = 0$;
6. *jeśli $f$ jest ciągła, to $\varphi_\varepsilon \star f$ zbiega przy $\varepsilon \downarrow 0$ do $f$ niemal jednostajnie.*

---

1. Niech $f, g, h \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$. Pokaż, że $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$.

2. Niech $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie $\ell_n$-mierzalna i nieujemna. Załóżmy, że $\int \varphi \, \mathrm{d}\ell_n = 1$ oraz $\{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) > 0\} \subseteq \mathbf{B}(0,1)$. Dla $\varepsilon > 0$ kładziemy $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ oraz $f_\varepsilon = f \star \varphi_\varepsilon$. Pokaż, że

   (a) $\int \varphi_\varepsilon \, \mathrm{d}\ell_n = 1$ dla każdego $\varepsilon > 0$;

   (b) $\{x \in \mathbf{R}^n : \varphi_\varepsilon(x) > 0\} \subseteq \mathbf{B}(0, \varepsilon)$ dla każdego $\varepsilon > 0$;

   (c) $\|f_\varepsilon\|_1 \leqslant \|f\|_1$ dla każdego $\varepsilon > 0$;

   (d) jeśli $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jest ciągła, to $f_\varepsilon$ zbiega do $f$ niemal jednostajnie przy $\varepsilon \downarrow 0$.

   (e) jeśli $f \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$, to $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|f_\varepsilon - f\|_1 = 0$.

3. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie $\ell_1$-całkowalna na każdym przedziale ograniczonym. Kładziemy $F(x) = \int_0^x f \, d\ell_1$ oraz $F_h(x) = h^{-1}(F(x+h) - F(x))$ dla $x, h \in \mathbf{R}$. Pokaż, że $\lim_{h\to 0} \|F_h - f\|_1 = 0$.

4. Niech $P : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie wielomianem, a $f \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$ ma zwarty nośnik. Pokaż, że funkcja $f \star P$ jest dobrze określona i jest wielomianem.

5. **[Twierdzenie Weierstrassa]** Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $T_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ wzorem

$$T_n(x) = \begin{cases} c_n(1 - \|x\|^2)^n & \text{dla } x \in \mathbf{B}(0,1) \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{B}(0,1)\,, \end{cases}$$

gdzie $c_n^{-1} = \int_{\mathbf{B}(0,1)} (1 - \|x\|^2)^n \, d\ell_n(x)$. Niech $f \in C_c^0(\mathbf{R}^n)$ ma nośnik zawarty w $\mathbf{B}(0, \frac{1}{2})$.

(a) Pokaż, że $(f \star T_n)|_{\mathbf{B}(0,\frac{1}{2})}$ jest wielomianem dla $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pokaż, że $f \star T_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ jednostajnie na kuli $\mathbf{B}(0, \frac{1}{2})$.

(c) Wywnioskuj, że jeśli $K \subseteq \mathbf{R}^n$ jest zwarty, to każdą funkcję ciągłą $K \to \mathbf{R}$ można jednostajnie przybliżać wielomianami.

6. Niech $p \in [1, \infty)$ i $k \in \mathbb{N}$. Pokaż, że $\mathbf{L}_p(\ell_n) \cap C_c^0(\mathbf{R}^n)$ jest gęstą podprzestrzenią liniową w $\mathbf{L}_p(\ell_n)$.

*Uwaga.* Funkcje ciągłe i ograniczone na $\mathbf{R}^n$ *nie są* gęste w $\mathbf{L}_\infty(\ell_n)$ gdyż jednostajna granica ciągu funkcji ciągłych musi być ciągła.

7. **[Ważne!]** Niech $p \in [1, \infty)$ oraz $f \in \mathbf{L}_p(\ell_n)$. Definijuemy funkcję $\tau : \mathbf{R}^n \to \mathbf{L}_p(\ell_n)$ wzorem $\tau(v)(x) = f(x + v)$. Pokaż, że $\tau$ jest jednostajnie ciągła.

*Wskazówka.* Można skorzystać z zadania 6.

8. **[Nierówność Höldera]** Niech $p, q \in [1, \infty]$ spełniają $1/p + 1/q = 1$ oraz $f \in \mathbf{L}_p(\ell_n)$ i $g \in \mathbf{L}_q(\ell_n)$. Pokaż, że $\int fg \, d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

9. Niech $p, q, r \in [1, \infty]$ będą takie, że $1/p + 1/q + 1/r = 2$ oraz $f \in \mathbf{L}_p(\ell_n)$, $g \in \mathbf{L}_q(\ell_n)$, $h \in \mathbf{L}_r(\ell_n)$. Pokaż, że

$$\iint f(x) g(x - y) h(y) \, d\ell_n(x) \, d\ell_n(y) \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r \,.$$

*Wskazówka.* $|ABC| = (|A|^p |B|^q)^{1-1/r} (|A|^p |C|^r)^{1-1/q} (|B|^q |C|^r)^{1-1/p}$ dla $A, B, C \in \mathbf{R}$.

10. **[Nierówność Younga dla splotu]** Niech $p, q, s \in [1, \infty]$, $g \in \mathbf{L}_q(\ell_n)$, $h \in \mathbf{L}_r(\ell_n)$ oraz $1/q + 1/r = 1 + 1/s$. Wykaż, że

$$\|g \star h\|_s \leqslant \|g\|_q \|h\|_r \,.$$

*Wskazówka.* Skorzystaj z zadania 9. Jeśli $s < \infty$, przymij $p = s/(s-1)$ i zauważ, że jeśli $f \in \mathbf{L}_s(\ell_n)$, to istnieje $F \in \mathbf{L}_p(\ell_n)$ taka, że $\|f\|_s = \int f(x) F(x) \, d\ell_n(x)$. Jak wygląda $F$?

11. Niech $p, q \in [1, \infty]$ spełniają $1/p + 1/q = 1$, $g \in \mathbf{L}_p(\ell_n)$ oraz $f \in \mathbf{L}_q(\ell_n)$. Pokaż, że funkcja $f \star g$ jest dobrze określoną funkcją ciągłą.

    *Wskazówka.* Użyj nierówności Höldera i zadania 7.

12. Niech $p \in [1, \infty)$, $f \in \mathbf{L}_p(\ell_n)$ oraz $\varphi \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$ spełnia $\|\varphi\|_1 = 1$. Dla $\varepsilon > 0$ kładziemy $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Pokaż, że $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|f \star \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0$.

    *Uwaga.* Dowodzi to, że $\mathbf{L}_p(\ell_n) \cap C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathbf{L}_p(\ell_n)$.

    *Uwaga.* Przestrzeń $\mathbf{L}_\infty(\ell_n) \cap C^0(\mathbf{R}^n)$ *nie jest* gęstą podprzestrzenią w $\mathbf{L}_\infty(\ell_n)$.

    *Wskazówka.* Ten sam dowód co dla $\mathbf{L}_1$ plus nierówność Younga.

13. Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ciągła i ograniczona, zaś $\varphi \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$ spełnia $\|\varphi\|_1 = 1$ oraz $\varphi \geqslant 0$. Dla $\varepsilon > 0$ kładziemy $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Pokaż, że $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}(\varphi_\varepsilon \star f)(x) = f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}^n$.

14. Niech $f_\delta(x) = \delta/2 \exp(-\delta|x|)$ dla $\delta > 0$ oraz $x \in \mathbf{R}$. Wykaż, że jeśli $g \in \mathbf{L}_1(\ell_1)$, to

$$\lim_{\delta \to \infty} \|f_\delta \star g - g\|_1 = 0\,.$$

    *Wskazówka.* Skorzystaj z zadania 12.

15. Niech $p, q \in [1, \infty]$ będą takie, że $1/p + 1/q = 1$, $f \in \mathbf{L}_p(\ell_n)$, $g \in \mathbf{L}_1(\ell_n) \cap C^1(\mathbf{R}^n)$. Załóżmy ponadto, że pochodna $\mathrm{d}g : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ jest taka, że $\mathrm{d}g(\cdot)e \in \mathbf{L}_q(\ell_n)$ dla każdego $e \in \mathbf{R}^n$. Pokaż, że funkcja $f \star g$ jest klasy $C^1$ oraz $\mathrm{d}(f \star g)(\cdot)e = f \star \mathrm{d}g(\cdot)e$ dla każdego $e \in \mathbf{R}^n$.

    *Wskazówka.* Użyj zadania 11 oraz zadania 8 z Tematu 1b.

16. Niech $f \in \mathbf{L}_1(\ell_1)$, $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie dana wzorem $\varphi(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Dla $y > 0$ kładziemy $\varphi_y(x) = y^{-1}\varphi(x/y)$. Definiujemy $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ oraz funkcję $u : H \to \mathbf{R}$ wzorem $u(x, y) = \boldsymbol{\pi}^{-1}(f \star \varphi_y)(x)$, gdzie $\boldsymbol{\pi} = \ell_2(\mathbf{B}(0, 1))$. Pokaż, że

    (a) $u$ jest klasy $C^\infty$;

    (b) $\Delta u = \mathrm{D}_1\mathrm{D}_1 u + \mathrm{D}_2\mathrm{D}_2 u = 0$;

    (c) jeśli $f$ jest ciągła, to $\lim_{y \downarrow 0} u(x, y) = f(x)$ dla $x \in \mathbf{R}$.

    *Uwaga.* Funkcja $u$ jest rozwiązaniem równania Laplace'a w $H$ (operator różniczkowy $\Delta$ to tzw. *Laplasjan*) z warunkiem brzegowym danym przez $f$. Funkcje spełniające $\Delta u = 0$ nazywamy *funkcjami harmonicznymi.* Funkcja $\varphi_y$ to tzw. *jądro Poissona.*

17. Dla $\mu \in (0, 1]$ definiujemy $\varphi_\mu : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ wzorem $\varphi_\mu(x) = |x|^{n(\mu-1)}$. Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie otwarty i ograniczony, a $f : \Omega \to \mathbf{R}$ będzie $\ell_n$-całkowalna. Przedłużamy $f$ do funkcji $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kładąc $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega$. Definiujemy $V_\mu f = f \star \varphi_\mu$.

(a) Pokaż, że

$$\int_{\mathbf{B}(0,R)} \varphi_\mu \, \mathrm{d}\ell_n = \mu^{-1}\boldsymbol{\alpha}(n)R^n \quad \text{dla } R \in (0,\infty)\,,$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}(n) = \ell_n(\mathbf{B}(0,1))$.

(b) Pokaż, że $V_\mu \mathbb{1}_\Omega(x) \leqslant \mu^{-1}\boldsymbol{\alpha}(n)^{1-\mu}\ell_n(\Omega)^\mu$ dla $x \in \Omega$.

*Wskazówka.* Znajdź $R > 0$ takie, że $\ell_n(\Omega) = \boldsymbol{\alpha}(n)R^n$.

(c) Niech $q, r, s \in [1,\infty)$ będą takie, że $1/q + 1/r = 1 + 1/s$. Kładziemy $\delta = 1/q - 1/s \in [0,1)$ oraz wybieramy $\mu \in (0,1]$ takie, że $\mu > \delta$. Załóżmy, że $f \in \mathbf{L}_q(\ell_n)$. Pokaż, że

$$\|V_\mu f\|_s \leqslant \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \boldsymbol{\alpha}(n)^{1-\mu}\ell_n(\Omega)^{\mu-\delta}\|f\|_q\,.$$

*Wskazówka.* Nierówność Younga dla splotu.

18. **[Nierówność Poincaré]** Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie otwarty i ograniczony, $d = \sup\{|x-y| : x, y \in \Omega\}$, $u \in C^1(\Omega)$, $S \subseteq \Omega$ będzie $\ell_n$-mierzalny i taki, że $\ell_n(S) > 0$. Pokaż, że dla $x \in \Omega$ zachodzi

$$\left|u(x) - ⨍_S u \, \mathrm{d}\ell_n\right| \leqslant \frac{d^n}{n\ell_n(S)} \int_\Omega \frac{\|\mathrm{d}u(y)\|}{|x-y|^{n-1}} \, \mathrm{d}\ell_n(y) = \frac{d^n}{n\ell_n(S)} V_{1/n}\|\mathrm{d}u(\cdot)\|(x)\,.$$

Wywnioskuj, że dla $p \in [1,\infty)$ zachodzi

$$\left\|u(x) - ⨍_S u \, \mathrm{d}\ell_n\right\|_p \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)^{1-1/n}\ell_n(\Omega)^{1/n}}{\ell_n(S)} d^n \|\mathrm{d}u\|_p\,.$$

*Uwaga.* Symbol $⨍_S u \, \mathrm{d}\ell_n = \ell_n(S)^{-1}\int_S u \, \mathrm{d}\ell_n$ oznacza średnią z $u$ na zbiorze $S$.

*Wskazówki.*

(a) bez straty ogólności można założyć, że $x = 0$;

(b) przedstaw $u(x) - u(y)$ jako całkę z pochodnej;

(c) rozszerz $W(z) = \|\mathrm{d}u(z)z/|z|\|$ do funkcji $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kładąc zero na zbiorze $\mathbf{R}^n \setminus \Omega$;

(d) skorzystaj z zadania 1(b) z Tematu 1c by zamienić całkę po kuli na całkę podwójną, t.j. dla $s \in (0,\infty)$ zachodzi

$$\int_{\mathbf{B}(0,d)} \|\mathrm{d}u(s\tfrac{z}{|z|})\tfrac{z}{|z|}\| \, \mathrm{d}\ell_n(z) = \int_0^d r^{n-1} \int_{\partial\mathbf{B}(0,1)} \|\mathrm{d}u(sw)w\| \, \mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(w) \, \mathrm{d}\ell_1(r)\,,$$

gdzie $\mathscr{H}^{n-1} \llcorner \partial\mathbf{B}(0,1)$ pokrywa się z miarą powierzchniową na sferze.

19. **[Transformata Laplace'a]** Niech $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ będzie $\ell_1$-całkowalna. Kładziemy $\mathcal{L}f(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-tx} \, \mathrm{d}\ell_1(t)$. Pokaż, że $\mathcal{L}f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ jest klasy $C^\infty$.

20. Niech $f, g \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$. Pokaż, że

$$\operatorname{spt}(f \star g) \subseteq \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g = \{x + y : x \in \operatorname{spt} f,\ y \in \operatorname{spt} g\}\,.$$

W szczególności, jeśli $\operatorname{spt} f \subseteq \mathbf{B}(0, r)$, to $\operatorname{spt}(f \star g) \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, \operatorname{spt} g) \leqslant r\}$.

21. Niech $f_0 = \mathbb{1}_{[0,1]} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oraz $f_{n+1} = f_n \star f_0$ dla $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Wyznacz $\operatorname{spt} f_n$.
    (b) Pokaż, że $f_n(x) > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in (0, n + 1)$.
    (c) Pokaż, że $f_n \in C^{n-1}(\mathbf{R})$.
    (d) Pokaż, że $f_n|_{I_k}$ jest wielomianem dla każdego $k \in \mathbf{Z}$, gdzie $I_k = (k, k + 1)$.

22. Niech $f \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$ będzie taka, że

$$\int f \cdot g \,\mathrm{d}\ell_n = 0$$

dla każdej funkcji gładkiej $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ o zwartym nośniku. Pokaż, że $f(x) = 0$ dla $\ell_n$-prawie wszystkich $x$.

23. Niech $f \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$ będzie taka, że

$$\int f \cdot g \,\mathrm{d}\ell_n = 0$$

dla każdej funkcji gładkiej $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ o zwartym nośniku spełniającej

$$\int g \,\mathrm{d}\ell_n = 0\,.$$

Pokaż, że istnieje stała $c > 0$ taka, że $f(x) = c$ dla $\ell_n$-prawie wszystkich $x$.

24. Niech $k \in \mathbb{N}$ zaś $f \in \mathbf{L}_1(\ell_n)$ będzie taka, że

$$\int_{\mathbf{B}(0,1)} f \cdot g \,\mathrm{d}\ell_n = 0$$

dla każdej funkcji gładkiej $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ spełniającej

$$\int_{\mathbf{B}(0,1)} g \cdot P \,\mathrm{d}\ell_n = 0 \quad \text{dla każdego wielomianu } P \text{ stopnia co najwyżej } k$$

Czy wynika stąd, że istnieje wielomian $W$ stopnia co najwyżej $k$ taki, że $f = W|_{\mathbf{B}(0,1)}$?

# Literatura

[Bou04] Nicolas Bourbaki. *Integration. I. Chapters 1–6.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the 1959, 1965 and 1967 French originals by Sterling K. Berberian.

[DS88] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear operators. Part I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. URL: `https://doi.org/10.1007/978-3-642-62010-2`,

[SG77] G. E. Shilov and B. L. Gurevich. *Integral, measure and derivative: a unified approach.* Dover Publications, Inc., New York, english edition, 1977. Translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Dover Books on Advanced Mathematics.

[Str16] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II (skrypt wykładu), Jan 2016. wersja z dnia: 5.01.2016. URL: `http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/Analiza_Matematyczna_2/Notatki_files/skrypt-amII-05-01-2016.pdf`.