1. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie monotoniczna. Udowodnij, że f jest ℓ_1-mierzalna.

2. Udowodnij, że funkcja charakterystyczna zbioru $A \subseteq \mathbf{R}^n$ jest ℓ_n-mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy A jest ℓ_n-mierzalny.

3. Udowodnij, że funkcje

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lfloor x \rfloor}{1 + n^5 \lfloor x \rfloor^2}$$

$$\text{oraz} \quad g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,, \quad g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lfloor xy \rfloor}{1 + n^3 \lfloor x^2 + y^2 \rfloor}$$

są mierzalne.

4. Niech $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Udowodnij, że f' jest funkcją mierzalną.

5. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ wzorem $f_n(x,y) = \exp(-n|x^2 - y|)$. Udowodnij, że ciąg f_n zbiega ℓ_2-prawie wszędzie do funkcji zerowej.

6. Niech $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zbiega ℓ_1-prawie wszędzie do $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Załóżmy, że istnieje funkcja $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz ℓ_1-prawie wszystkich x zachodzi $|f_n(x)| < g(x)$. Udowodnij, że $|f(x)| \leqslant g(x)$ dla ℓ_1-prawie wszystkich x.

7. Niech $f_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ będą dane wzorem

$$f_n(x,y) = \exp\left(\sin^n(x) + \sqrt[n]{|\sin(y/n)|}\right).$$

Udowodnij, że ciąg f_n jest zbieżny ℓ_2-prawie wszędzie i znajdź jego granicę.

8. Niech $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ oraz $f(0) = 1$. Czy f jest całkowalna na $\mathbf{R}$?

9. Podaj przykład ciągu funkcji ℓ_1-całkowalnych $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ takiego, że f_n zbiega ℓ_1-prawie wszędzie do pewnej funkcji ℓ_1-całkowalnej $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ oraz

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, d\ell_1(x) < \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, d\ell_1(x)\,.$$

Uwaga. Zwróć uwagę, że nierówność jest ostra. Przypomnij sobie co mówi Lemat Fatou.

10. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{2 + \sin^n(x^2)}{1 + x^2}\,.$$

Wykaż, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]} f_n(x)\, d\ell_1(x)$$

istnieje i znajdź jej wartość.

Rozwiązanie. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$g_n = f_n \cdot \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]},$$

Zauważmy, że $|g_n(x)| \leqslant |f_n(x)| \leqslant \frac{3}{1+x^2}$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ oraz

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\ell_1(x) < \infty\,.$$

Ponadto mamy

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{2}{1+x^2} \quad \text{dla } \ell_1 \text{ prawie wszystkich } x \in \mathbf{R}\,.$$

Spełnione są zatem założenia twierdzenia o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki (Lebesgue'ga) i możemy napisać

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]} f_n\,\mathrm{d}\ell_1 = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,\mathrm{d}\ell_1 = \int \lim_{n\to\infty} g_n\,\mathrm{d}\ell_1 = \int \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\ell_1 = 2\pi\,.$$

11. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ wzorem

$$f_n(x,y) = \sin^n(y-x)\exp(-x^2-3y^2)\,.$$

Wykaż, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{(x,y):x^2+2y^2<n^2\}} f_n\,\mathrm{d}\ell_2$$

istnieje i znajdź jej wartość.

12. [Egzamin 2011/2012] Wykaż, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-2\pi n}^{2\pi n} \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \exp(-2x^2)\,\mathrm{d}\ell_1(x)$$

istnieje i znajdź jej wartość.

13. [Nierówność Czebyszewa] Niech μ będzie miarą na X oraz $f : X \to \mathbf{R}$ będzie μ-całkowalna. Pokaż, że

$$\mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \leqslant \frac{1}{t} \int f\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Wywnioskuj, że jeśli $\mu(X) < \infty$ oraz $K \in (0,\infty)$, to

$$\mu\Big(\Big\{x \in X : f(x) > K\mu(X)^{-1} \textstyle\int f\,\mathrm{d}\mu\Big\}\Big) \leqslant \frac{\mu(X)}{K}\,.$$

14. Niech $y_n \in [0,1]$ będzie dowolnym ciągiem. Czy funkcja $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{|x - y_n|}}$$

jest ℓ_1-całkowalna na $[0,1]$?

15. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \exp(-\cos^n(x))\, \mathrm{d}\ell_1(x)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} n(\exp(x/n) - 1)\frac{1}{1+x^4}\, \mathrm{d}\ell_1(x)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} x^{-3} n \ln(1 + x/n)\, \mathrm{d}\ell_1(x)\,.$$

Definicja. Niech $p \in (0,\infty)$, X będzie zbiorem, μ miarą nad X, $f : X \to \mathbf{R}$ funkcją μ mierzalną, zaś $f_n : X \to \mathbf{R}$ ciągiem funkcji μ mierzalnych.

(a) Mówimy, że f_n *zbiega μ prawie wszędzie* jeśli

$$\mu(\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}) = 0\,.$$

(b) Mówimy, że f_n *zbiega w $L^p(\mu)$* do f jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) = 0\,.$$

(c) Mówimy, że f_n *zbiega μ według miary* do f jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0 \quad \text{dla każdego } \varepsilon > 0\,.$$

---

16. Niech μ-będzie miarą na X, $f_n : X \to \mathbf{R}$ będzie ciągiem funkcji μ-całkowalnych, a $p \in [1,\infty)$. Udowodnij, że

   (a) jeśli f_n zbiega jednostajnie, to zbiega w $L^p(\mu)$ oraz μ-prawie wszędzie;
   (b) jeśli f_n zbiega w $L^p(\mu)$, to zbiega μ-według miary;
   (c) jeśli f_n zbiega μ-prawie wszędzie, to zbiega μ-według miary;
   (d) jeśli f_n zbiega μ-według miary, to istnieje podciąg zbieżny μ-prawie wszędzie.

   Dla każdej implikacji znajdź przykład ciągu f_n pokazujący, że implikacja odwrotna nie zachodzi.
