1. Definiujemy $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kładąc dla $t \geqslant 0$

$$f(x,t) = \begin{cases} x & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{t}\,, \\ -x + 2\sqrt{t} & \text{jeśli } \sqrt{t} < x \leqslant 2\sqrt{t}\,, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach}\,. \end{cases}$$

Dla $t < 0$ kładziemy $f(x,t) = -f(x,|t|)$. Ponadto określamy funkcję $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ wzorem

$$g(t) = \int_{-1}^{1} f(x,t)\, \mathrm{d}\ell_1(x) \quad \text{dla } t \in \mathbf{R}\,.$$

(a) Pokaż, że f jest ciągła na $\mathbf{R}^2$ oraz $\mathrm{D}_2 f(x,0) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$.

(b) Pokaż, że $g(t) = t$ o ile $|t| < \frac{1}{4}$. Zatem

$$g'(0) \neq \int_{-1}^{1} \mathrm{D}_2 f(x,0)\, \mathrm{d}\ell_1(x)\,.$$

(c) Czy $f(x,\cdot)$ jest absolutnie ciągła, tzn. czy zachodzi wzór

$$f(x,s) - f(x,r) = \int_{r}^{s} \mathrm{D}_2 f(x,t)\, \mathrm{d}\ell_1(t) \quad \text{dla } s,r,x \in \mathbf{R}\,?$$

(d) Czy można stosować twierdzenie Fubiniego/Tonellego do całki z $\mathrm{D}_2 f$?

(e) Czy $\mathrm{D}_2 f$ jest całkowalna w otoczeniu $0 \in \mathbf{R}^2$?

(f) Dlaczego nie można różniczkować pod znakiem całki?

2. Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n całkowalna. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór zwarty $K \subseteq \mathbf{R}^n$, że $\int_{\mathbf{R}^n \setminus K} |f|\, \mathrm{d}\ell_n \leqslant \varepsilon$.

Rozwiązanie. Załóżmy, że tak nie jest. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{B}(0,r)} |f|\, \mathrm{d}\ell_n > \varepsilon \quad \text{dla każdego } r > 0\,.$$

Dla $r > 0$ kładziemy $f_r = f \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{B}(0,r)}$ i zauważmy, że $|f_r| \leqslant |f|$ oraz $\lim_{r\to\infty} f_r(x) = f(x)$, więc $\int |f_r|\, \mathrm{d}\ell_n \to \int |f|\, \mathrm{d}\ell_n$ dla $r \to \infty$ z twierdzenia o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \int |f|\, \mathrm{d}\ell_n &= \lim_{r\to\infty} \left(\int_{\mathbf{B}(0,r)} |f|\, \mathrm{d}\ell_n + \int_{\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{B}(0,r)} |f|\, \mathrm{d}\ell_n \right) \\ &\geqslant \lim_{r\to\infty} \int |f_r|\, \mathrm{d}\ell_n + \varepsilon = \int |f|\, \mathrm{d}\ell_n + \varepsilon \end{aligned}$$

co ewidentnie daje sprzeczność.

3. Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n-całkowalna, $a \in \mathbf{R}^n$. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje promień $r > 0$ taki, że $\int_{\mathbf{B}(a,r)} |f| \,\mathrm{d}\ell_n < \varepsilon$.

4. Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n-całkowalna. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego zbioru ℓ_n-mierzalnego $A \subseteq \mathbf{R}^n$ spełniającego $\ell_n(A) \leqslant \delta$ zachodzi $\int_A f \,\mathrm{d}\ell_n \leqslant \varepsilon$.

   Rozwiązanie. Załóżmy, że powyższa własność nie zachodzi dla pewnych f i ε. Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ znajdziemy zbiór $A_k \subseteq \mathbf{R}^n$ taki, że $\ell_n(A_k) \leqslant 2^{-k}$ oraz $\int_{A_k} f \,\mathrm{d}\ell_n > \varepsilon$. W szczególności $\int_{A_k} |f| \,\mathrm{d}\ell_n > \varepsilon$ dla $k \in \mathbb{N}$. Niech $B_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$, $C_k = \mathbf{R}^n \setminus B_k$ oraz $f_k = |f| \cdot \mathbb{1}_{C_k}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Oczywiście

$$\ell_n(B_k) \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \ell_n(A_j) \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

   Zatem dla ℓ_n prawie wszystkich $x \in \mathbf{R}^n$ mamy

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = |f(x)|\,, \quad f_k(x) \leqslant |f(x)|\,, \quad |f| - f_k = |f| \cdot \mathbb{1}_{B_k}\,, \quad \int |f| - f_k \,\mathrm{d}\ell_n > \varepsilon\,.$$

   W takim razie twierdzenie o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki daje

$$\int |f| \,\mathrm{d}\ell_n = \lim_{k\to\infty} \int f_k + |f| - f_k \,\mathrm{d}\ell_n \geqslant \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\ell_n + \varepsilon = \int |f| \,\mathrm{d}\ell_n + \varepsilon$$

   co ewidentnie daje sprzeczność.

5. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$ ograniczonym przez parabolę o równaniu $y = x^2$ oraz prostą o równaniu $x + y = 2$. Oblicz

$$\int_D 6x + 2y^2 \,\mathrm{d}\ell_2(x,y)\,.$$

   Rozwiązanie. Rozwiązując układ równań

$$x + y = 2\,, \quad y = x^2$$

   dowiadujemy się, że rzut D na oś x-ów to odcinek $[-2, 1]$. Funkcja podcałkowa jest wielomianem, a więc jest ciągła (w szczególności mierzalna) i stąd ograniczona na zbiorze zwartym D (w szczególności całkowalna). Możemy zatem korzystać z twierdzenia Fubiniego.

$$\begin{aligned}\int_D 6x + 2y^2 \,\mathrm{d}\ell_2(x,y) &= \int_{-2}^{1} \int_{x^2}^{2-x} 6x + 2y^2 \,\mathrm{d}\ell_1(y) \,\mathrm{d}\ell_1(x) \\ &= \int_{-2}^{1} 6x(2 - x - x^2) + \frac{2}{3}y^3 \Big|_{x^2}^{2-x} \,\mathrm{d}\ell_1(x) \\ &= \int_{-2}^{1} 12x - 6x^2 - 6x^3 + \frac{16}{3} - 8x + 4x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^6 \,\mathrm{d}\ell_1(x) = \frac{117}{7} = 16\frac{5}{7}\,.\end{aligned}$$

6. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$ ograniczonym krzywymi o równaniach $y = x^2$ oraz $y = x^3$. Oblicz
$$\int_D xy^2 \,\mathrm{d}\ell_2(x,y)\,.$$

7. Niech $A \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie mierzalny i taki, że $\ell_n(A) > 0$. Udowodnij, że rzut ortogonalny A na dowolną k-wymiarową podprzestrzeń liniową $\mathbf{R}^n$ ma dodatnią miarę ℓ_k.

   Rozwiązanie. Niech T będzie k-wymiarową podprzestrzenią $\mathbf{R}^n$, zaś $p \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$ oraz $q \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n-k})$ będą takie, że dla $x \in \mathbf{R}^k$ i $y \in \mathbf{R}^{n-k}$
$$p^\top(x) \in T\,, \quad q^\top(y) \in T^\perp\,, \quad p \circ p^\top(x) = x\,, \quad q \circ q^\top(y) = y$$
   (innymi słowy $p^\top \circ p$ oraz $q^\top \circ q$ są rzutami ortogonalnymi na T, oraz $T^\perp$ odpowiednio). Dla $y \in \mathbf{R}^{n-k}$ kładziemy
$$A_y = \{z \in A : q(z) = y\}\,.$$
   Z twierdzenie Fubiniego mamy
$$0 < \ell_n(A) = \int \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\ell_n = \int \ell_k(p[A_y])\,\mathrm{d}\ell_{n-k}(y)\,.$$
   W takim razie funkcja $\mathbf{R}^{n-k} \ni y \mapsto \ell_k(p[A_y])$ nie może być ℓ_k prawie wszędzie zerowa, a zatem istnieje $y \in \mathbf{R}^{n-k}$ takie, że $\ell_k(p[A]) \geqslant \ell_k(p[A_y]) > 0$.

8. Oblicz całkę
$$\int_D x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\ell_2(x,y)\,, \quad \text{gdzie } D = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x^2 - y^2 < 4,\ 2 < xy < 4\Big\}\,.$$

9. Oblicz całkę
$$\int_D x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\ell_3(x,y,z)\,, \quad \text{gdzie } D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0\Big\}\,.$$

10. Oblicz średnią odległość punktu kuli jednostkowej od jej środka.

    Uwaga. Przez wartość średnią funkcji f na zbiorze $A \subseteq \mathbf{R}^n$ rozumiemy liczbę
$$\ell_n(A)^{-1} \int_A f \,\mathrm{d}\ell_n\,.$$

11. Oblicz całkę
$$\int_{\mathbf{B}(0,1)} y \exp(x^2) \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\ell_2(x,y)\,.$$

12. Uzasadnij, że przekształcenie $\Phi : [0,1] \times [0,\pi/2] \to \mathbf{R}^2$ dane wzorem
$$\Phi(x,y) = \Big(u(x,y), v(x,y)\Big) = \Big(e^x \cos(y),\ e^x \sin(y)\Big)$$
jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Opisz obraz Φ, a następnie dokonaj zamiany zmiennych $(x,y) \mapsto \Phi(x,y)$ w całce
$$\int \frac{\exp(2x)}{1+\exp(4x)\cos^2(x)\sin^2(x)}\, \mathrm{d}\ell_2(x,y)\,.$$

13. Uzasadnij, że przekształcenie $\Phi : [0,1]^2 \to \mathbf{R}^2$ dane wzorem
$$\Phi(x,y) = \Big(u(x,y), v(x,y)\Big) = \Big(2xy,\ x^2-y^2\Big)$$
jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Opisz obraz Φ, a następnie dokonaj zamiany zmiennych $(x,y) \mapsto \Phi(x,y)$ w całce
$$\int \sqrt[3]{x^4-6x^2y^2+y^4}\, \mathrm{d}\ell_2(x,y)\,.$$

14. Oblicz całkę
$$\int_0^1 \int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x+y+2\sqrt{xy}\, \mathrm{d}\ell_1(x)\, \mathrm{d}\ell_1(y)$$
dokonując zamiany zmiennych $x = s\cos^4(t)$, $y = s\sin^4(t)$.

15. Znajdź środek masy półkuli
$$H = \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leqslant z,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\Big\}$$
jeśli jej gęstość wyraża się wzorem $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Uwaga. Przez środek masy ciała $H \subseteq \mathbf{R}^n$ o określonej funkcji gęstości $\rho : H \to [0,\infty)$ rozumiemy punkt $a \in \mathbf{R}^n$ spełniający
$$p(a) = \left(\int_H \rho\, \mathrm{d}\ell_n\right)^{-1} \int_H p(x)\rho(x)\, \mathrm{d}\ell_n(x)$$
dla dowolnego przekształcenia liniowego $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

16. Niech $A \subseteq \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geqslant 0\}$ będzie ℓ_2 mierzalny zaś $B \subseteq \mathbf{R}^3$ będzie zbiorem powstałym przez obrót A wokół osi x. Wykaż, że B jest ℓ_3 mierzalny oraz
$$\ell_3(B) = 2\pi \int_A y\, \mathrm{d}\ell_2(x,y)\,.$$

Uwaga. Wynika stąd, że jeśli $\int_A |x| + y\, \mathrm{d}\ell_2(x,y) < \infty$, to $\ell_3(B)$ równa jest iloczynowi $\ell_2(A)$ przez długość okręgu zakreślonego przez środek ciężkości A. Jest to tzw. *reguła Guldina.*

17. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchnią opisaną wzorem

$$|\sqrt{x^2+y^2}-4|+|z|=\sqrt{2}\,.$$

18. Znajdź środek ciężkości figury płaskiej opisanej układem nierówności

$$y>9x^2-9\,,\quad y<4x^2-4\,.$$

Następnie oblicz objętość bryły powstałej przez obrót tej figury wokół prostej o równaniu $y=1$.

Uwaga. Przez środek ciężkości ciała $H\subseteq\mathbf{R}^n$ bez określonej funkcji gęstości rozumiemy punkt $a\in\mathbf{R}^n$ spełniający

$$p(a)=\ell_n(H)^{-1}\int_H p(x)\,\mathrm{d}\ell_n(x)$$

dla dowolnego przekształcenia liniowego $p:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$.

19. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku przecięcia dwóch nieskończonych walców o promieniu 1 i prostopadłych osiach.

20. Oblicz objętość bryły zawartej w zbiorze $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x>0,\ y>0\}$ i ograniczonej powierzchniami $2xy=1$, $xy=2$, $y=2x$, $x=2y$, $z=0$, $yz=1$.

21. [∗] (zadanie z Birkholca) Wyznacz wektor siły grawitacyjnej pochodzącej od kuli jednorodnej K działającej na punkt materialny a. Rozważ dwa przypadki: $a\in K$ oraz $a\in\mathbf{R}^3\setminus K$.

Wskazówka. Na mocy prawa grawitacji Newtona wektor tej siły jest równy

$$C\int_K\frac{x-a}{|x-a|^3}\,\mathrm{d}\ell_3(x)$$

gdzie liczba $C>0$ jest proporcjonalna do iloczynu masy a przez gęstość masy kuli K.

Uwaga. Rozważmy kolejkę poruszającą się wyłącznie pod wpływem siły grawitacji przez tunel wywiercony w planecie (o jednostajnie rozłożonej gęstości!) wzdłuż prostej łączącej dowolnie wybrane punkty A i B na powierzchni. Wywnioskuj, że czas podróży z punktu A do B nie zależy od długości trasy.

22. Oblicz wartość średnią funkcji $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ na zbiorze $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2<z+y+z\}$.

23. Niech $L:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^k$ będzie izomorfizmem liniowym oraz $E\subseteq\mathbf{R}^k$ będzie zbiorem ℓ_k mierzalnym i ograniczonym. Wykaż, że obrazem przez L środka ciężkości zbioru E jest środek ciężkości obrazu $L[E]$.

24. Niech $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ będzie ograniczoną funkcją ciągłą. Wykaż, że

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_0^\infty \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}\ell_1(x) = \frac{\pi}{2} f(0) \, .$$

25. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_1 całkowalna. Definiujemy $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ wzorem $\varphi(y) = \int_y^{y+1} f(x) \, \mathrm{d}\ell_1(x)$. Udowodnij, że φ jest ℓ_1 całkowalna oraz zachodzi równość $\int \varphi \, \mathrm{d}\ell_1 = \int f \, \mathrm{d}\ell_1$.