Miara kuli jednostkowej w dowolnej przestrzeni Euklidesowej i nie tylko; cf. [Fed69, 3.2.13].

Definicja. Dla $n \in \mathbf{N}$, $p \in (0, \infty)$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $r \in (0, \infty)$ definiujemy

$$\mathbf{B}^n_p(a, r) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^p < r^p \right\}.$$

W przypadku $p = 2$ piszemy $\mathbf{B}^n_2(a, r) = \mathbf{B}^n(a, r)$, a jeśli wybór n jest oczywisty z kontekstu (np. wiedząc, że $a \in \mathbf{R}^n$) pomijamy również ten indeks pisząc $\mathbf{B}(a, r) = \mathbf{B}^n_2(a, r)$.

1. Niech $n \in \mathbf{N}$ spełnia $n \geqslant 2$. Kładziemy

$$\begin{aligned}
\Psi : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \to \partial \mathbf{B}^n(0,1) \subseteq \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}\,, \quad & \Psi(z) = \Big(z, \sqrt{1 - \|z\|^2}\Big)\,, \\
\bar{\Psi} : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \to \partial \mathbf{B}^n(0,1) \subseteq \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}\,, \quad & \bar{\Psi}(z) = \Big(z, -\sqrt{1 - \|z\|^2}\Big)\,, \\
\Phi : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \times (0, \infty) \to \mathbf{R}^n\,, \quad & \Phi(z, r) = r\Psi(z)\,, \\
\bar{\Phi} : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \times (0, \infty) \to \mathbf{R}^n\,, \quad & \bar{\Phi}(z, r) = r\bar{\Psi}(z)\,,
\end{aligned}$$

   (a) Pokaż, że istnieje funkcja gładka $J : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \to [0, \infty)$ taka, że

   $$|\det \mathrm{d}\bar{\Phi}(z, r)| = |\det \mathrm{d}\Phi(z, r)| = r^{n-1} J(z) \quad \text{dla } z \in \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \text{ i } r \in (0, \infty)\,.$$

   (b) Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n całkowalna. Pokaż, że

   $$\int f \,\mathrm{d}\ell_n = \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\mathbf{B}^{n-1}(0,1)} \big(f(r\Psi(z)) + f(r\bar{\Psi}(z))\big) J(z) \,\mathrm{d}\ell_{n-1}(z) \,\mathrm{d}r\,.$$

   (c) Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie taka, że $f \circ \Psi$ oraz $f \circ \bar{\Psi}$ są ℓ_{n-1} całkowalne. Kładziemy

   $$S^{n-1}(f) = \int_{\mathbf{B}^{n-1}(0,1)} \big(f(\Psi(z)) + f(\bar{\Psi}(z))\big) J(z) \,\mathrm{d}\ell_{n-1}(z)\,.$$
   $$\text{oraz} \quad \sigma(n-1) = S^{n-1}(\mathbf{R}^n \ni x \mapsto 1)\,.$$

   Uwaga. Zauważ, że $S^{n-1}(f) = S^{n-1}(g)$ jeśli $f|_{\partial \mathbf{B}^n(0,1)} = g|_{\partial \mathbf{B}^n(0,1)}$. Wartość $S^{n-1}(f)$ równa jest całce $\int_{\partial \mathbf{B}^n(0,1)} f \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}$, gdzie $\mathscr{H}^{n-1}$ jest tzw. $(n-1)$ *wymiarową miarą Hausdorffa w* $\mathbf{R}^n$. W szczególności $\sigma(n-1)$ jest równa mierze sfery jednostkowej w $\mathbf{R}^n$, tj. $\sigma(n-1) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial \mathbf{B}^n(0,1))$.

   (d) Niech $\boldsymbol{\alpha}(n) = \ell_n(\mathbf{B}(0,1))$ będzie miarą jednostkowej kuli w $\mathbf{R}^n$. Pokaż, że

   $$\sigma(n-1) = n\boldsymbol{\alpha}(n)\,.$$

   (e) Niech $\mathbf{\Gamma} : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ oznacza funkcję gamma Eulera, tj. $\mathbf{\Gamma}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x$ dla $s \in (0, \infty)$ (przyp. $\mathbf{\Gamma}(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$). Pokaż, że

   $$\mathbf{\Gamma}(s) = 2 \int_0^\infty x^{2s-1} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \quad \text{dla } s \in (0, \infty)\,.$$

   (f) Dla $z \in (0, \infty)^n$ kładziemy

   $$B(z) = \tfrac{1}{2} S^{n-1}\Big(\mathbf{R}^n \ni x \mapsto \textstyle\prod_{j=1}^n |x_j|^{2z_j - 1}\Big)\,.$$

   Pokaż, że jeśli $z \in (0, \infty)^n$ to

   $$\textstyle\prod_{j=1}^n \mathbf{\Gamma}(z_j) = B(z) \mathbf{\Gamma}\big(\sum_{j=1}^n z_j\big)\,.$$

(g) Zauważ, że $2B(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) = \sigma(n-1)$ i wywnioskuj, że

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^n}{\boldsymbol{\Gamma}(1+n/2)}; \quad \text{w szczególności } \boldsymbol{\alpha}(2) = \boldsymbol{\Gamma}(1/2)^2 = \pi\,.$$

2. Niech Ψ, Φ oraz J będą jak w zadaniu 1. Pokaż, że

$$\begin{aligned} J(z)^2 &= \det\bigl(\mathrm{d}\Psi(z)^\top \circ \mathrm{d}\Psi(z)\bigr) \\ &= r^{-2(n-1)} \det\bigl(\mathrm{d}\Phi(z,r)^\top \circ \mathrm{d}\Phi(z,r)\bigr) \quad \text{dla } z \in \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \text{ i } r \in (0,\infty)\,. \end{aligned}$$

Wskazówka. Dla każdego $z \in \mathbf{B}^{n-1}(0,1)$ oraz $u \in \mathbf{R}^{n-1}$ mamy $\|\Psi(z)\| = 1$, a także $\mathrm{d}\Psi(z)u \perp \Psi(z)$ zatem $\mathrm{d}\Psi(z)^\top(\Psi(z)) = 0$.

3. Definiujemy

$$\begin{gathered} \phi_p(x_1,\dots,x_n) = \bigl(|x_1|^{2/p}\operatorname{sgn}(x_1),\dots,|x_n|^{2/p}\operatorname{sgn}(x_n)\bigr) \quad \text{dla } p \in (0,\infty)\,, \\ X = \bigl\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n : x_i \neq 0 \text{ dla } i = 1,2,\dots,n\bigr\}\,. \end{gathered}$$

(a) Pokaż $\phi_p|_X$ jest dyfeomorefizmem oraz $\phi_p[B_2] = \mathbf{B}^n_p(0,1)$.

(b) Wywnioskuj, że

$$\ell_n(\mathbf{B}^n_p(0,1)) = \left(\frac{2}{p}\right)^n \frac{p}{n} B(1/p,\dots,1/p) = 2^n \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1+1/p)^n}{\boldsymbol{\Gamma}(1+n/p)}\,.$$

4. Niech $s > -1$ oraz $v \in \mathbf{R}^n$ spełnia $\|v\| = 1$. Pokaż, że

$$S^{n-1}\bigl(\mathbf{R}^n \ni x \mapsto |\langle x,v\rangle|^s\bigr) = \frac{2\boldsymbol{\Gamma}((s+1)/2)\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^{n-1}}{\boldsymbol{\Gamma}((s+m)/2)}\,.$$

Wskazówka. Przez niezmienniczość na obroty (tj. wybierając odpowiednio bazę w $\mathbf{R}^n$) można założyć, że $v = (1,0,\dots,0)$. Popatrz na $B((s+1)/2, 1/2, \dots, 1/2)$.

5. Niech $X = \operatorname{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$ będzie przestrzenią liniową wszystkich przekształceń liniowych typu $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$. Na X wprowadzamy iloczyn skalarny

$$f \bullet g = \operatorname{trace}(f^\top \circ g) \quad \text{oraz normę} \quad |f| = (f \bullet f)^{1/2} \quad \text{dla } f \in X\,.$$

Pokaż, że

$$|f|^2 = \boldsymbol{\alpha}(n)^{-1} \textstyle\int_{\mathbf{B}^n(0,1)} f \bullet f \,\mathrm{d}\ell_n(x) = n\boldsymbol{\alpha}(n)^{-1} \textstyle\int_{\mathbf{B}^n(0,1)} \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}\ell_n(x)\,.$$

Wskazówka. Niech $g = f^\top \circ f$. Zauważ, że $\|f(x)\|^2 = \langle g(x), x\rangle$ oraz g jest symetryczne (samosprzężone) i dodatnio określone. Małe twierdzenie spektralne pozwala zatem znaleźć bazę ortonormalną $v_1,\dots,v_n \in \mathbf{R}^n$ taką, że $g(v_i) = \lambda_i^2 v_i$ dla wszystkich $i \in \{1,2,\dots,n\}$ i pewnych liczb $\lambda_i \in \mathbf{R}$. Wówczas $f \bullet f = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$. Dalej należy skorzystać z zadań 1 oraz 4.

Literatura

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. URL: `https://doi.org/10.1007/978-3-642-62010-2`,