Definicja. Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbf{R}^n$ jest ℓ_n *mierzalny* jeśli dla każdego zbioru zwartego $K \subseteq \mathbf{R}^n$ funkcja charakterystyczna zbioru $A \cap K$ jest ℓ_n całkowalna.

Definicja. Niech $J \subseteq \mathbf{R}$ będzie przedziałem oraz $f : J \to \mathbf{R}$. Mówimy, że f jest *absolutnie ciągła* jeśli istnieje ℓ_1-mierzalna funkcja $g : J \to \mathbf{R}$ taka, że

$$f(x) - f(y) = \int_y^x g(s)\,\mathrm{d}\ell_1(s) \quad \text{o ile } x, y \in J \text{ oraz } y < x\,. \tag{1}$$

Uwaga. Załóżmy, że f i g są związane relacją (1). Wówczas f jest różniczkowalna ℓ_1 prawie wszędzie oraz $f'(t) = g(t)$ dla ℓ_1 prawie wszystkich $t \in J$. Dowód tego faktu przekracza jednak materiał analizy II; cf. [Roy88, Part I, Chapter 5, Section 4].

---

1. Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n całkowalna. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór zwarty $K \subseteq \mathbf{R}^n$, że $\int_{\mathbf{R}^n \setminus K} |f|\,\mathrm{d}\ell_n \leqslant \varepsilon$.

2. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$ ograniczonym przez parabolę o równaniu $y = x^2$ oraz prostą o równaniu $x + y = 2$. Oblicz
$$\int_D 6x + 2y^2\,\mathrm{d}\ell_2(x, y)\,.$$

3. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$ ograniczonym krzywymi o równaniach $y = x^2$ oraz $y = x^3$. Oblicz
$$\int_D xy^2\,\mathrm{d}\ell_2(x, y)\,.$$

4. Niech $A \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie mierzalny i taki, że $\ell_n(A) > 0$. Udowodnij, że rzut ortogonalny A na dowolną k-wymiarową podprzestrzeń liniową $\mathbf{R}^n$ ma dodatnią miarę ℓ_k.

   Wskazówka. Twierdzenie Fubiniego.

5. [Egzamin 2018/2019] Niech $A \subseteq \mathbf{R}^2$ będzie mierzalny. Definiujemy $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ wzorem
$$f(r) = \ell_2(A \cap \mathbf{B}(0, r)) \quad \text{dla } r > 0\,.$$
   Wykaż, że dla $t > 0$ zachodzi równość
$$\int_0^t f(\sqrt{r})\,\mathrm{d}r = \int_{A \cap \mathbf{B}(0,t)} (t - \|x\|^2)\,\mathrm{d}\ell_2(x)$$

6. [Kolokwium 2018/2019] Niech χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A, zaś $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie funkcją całkowalną i taką, że
$$\ell_n(\{x : |f(x)| > t\}) \leqslant (1 - t^4)\chi_{[0,1]}(t) \quad \text{dla } t > 0\,.$$
   (a) Uzasadnij, że
$$\int |f|\,\mathrm{d}\ell_n \leqslant \frac{4}{5}\,.$$

(b) Wykaż, że

$$\int |f(x)| \exp(|f(x)|) \, \mathrm{d}\ell_n(x) \leqslant 36e - 96 \, .$$

7. Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją schodkową Cantora. Czy f jest różniczkowalna ℓ_1 prawie wszędzie? Czy f jest absolutnie ciągła?

8. Niech $A \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie ℓ_n mierzalny, $J \subseteq \mathbf{R}$ będzie przedziałem otwartym, zaś $f : A \times J \to \mathbf{R}$. Dla $x \in A$ definiujemy funkcję $h_x : J \to \mathbf{R}$ tak, by

$$h_x(t) = f(x,t) \quad \text{dla } t \in J \, .$$

Załóżmy ponadto, że h_x jest absolutnie ciągła dla ℓ_n prawie wszystkich $x \in A$ zaś funkcja $k : A \times J \to \mathbf{R}$ dana wzorem

$$k(x,t) = h_x'(t) \quad \text{dla } x \in A,\ t \in J$$

jest ℓ_{n+1} całkowalna. Pokaż, że funkcja $g : J \to \mathbf{R}$ dana wzorem

$$g(t) = \int_A f(x,t) \, \mathrm{d}\ell_n(x) \quad \text{dla } t \in J$$

jest absolutnie ciągła i wyprowadź wzór na g'.

Uwaga. Powyższe założenia spełnione są w szczególności jeśli A jest otwarty, f jest klasy C^1 oraz k jest ℓ_{n+1} całkowalna.

9. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie całkowalna na każdym przedziale ograniczonym. Kładziemy

$$g(t) = \int_{\mathbf{R}} \cos(tx^2) \frac{f(x)}{1+x^6} \, \mathrm{d}\ell_1(x) \quad \text{dla } t \in \mathbf{R} \, .$$

Udowodnij, że g jest różniczkowalna i znajdź g'.

10. Wyznacz pochodne cząstkowe funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jeśli

$$f(u,v) = \int_{\mathbf{R}} \exp(-x^2) \sin(ux + vx) \, \mathrm{d}\ell_1(x) \quad \text{dla } (u,v) \in \mathbf{R}^2 \, .$$

11. Definiujemy $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kładąc dla $t \geqslant 0$

$$f(x,t) = \begin{cases} x & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{t} \, , \\ -x + 2\sqrt{t} & \text{jeśli } \sqrt{t} < x \leqslant 2\sqrt{t} \, , \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \, . \end{cases}$$

Dla $t < 0$ kładziemy $f(x,t) = -f(x,|t|)$. Pokaż, że f jest ciągła na $\mathbf{R}^2$ oraz $\mathrm{D}_2 f(x,0) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$.

Określmy $g(t) = \int_{-1}^{1} f(x,t) \, \mathrm{d}\ell_1(x)$. Pokaż, że $g(t) = t$ o ile $|t| < \frac{1}{4}$. Zatem

$$g'(0) \neq \int_{-1}^{1} \mathrm{D}_2 f(x,0) \, \mathrm{d}\ell_1(x) \, .$$

Literatura

[Roy88] H. L. Royden. *Real analysis.* Macmillan Publishing Company, New York, third edition, 1988.