Twierdzenie (Fubiniego [Str16, 5.24]). *Niech $f : \mathbf{R}^{n+m} \to \overline{\mathbf{R}}$ będzie ℓ_{n+m}-całkowalna lub ℓ_{n+m}-mierzalna i nieujemna. Wówczas*

1. *dla ℓ_n prawie wszystkich $x \in \mathbf{R}^n$ funkcja $\mathbf{R}^m \ni y \mapsto f(x,y)$ jest ℓ_m-mierzalna;*
2. *dla ℓ_m prawie wszystkich $y \in \mathbf{R}^m$ funkcja $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto f(x,y)$ jest ℓ_n-mierzalna;*
3. *funkcja $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto \int f(x,y)\,\mathrm{d}\ell_m(y)$ jest ℓ_n-mierzalna;*
4. *funkcja $\mathbf{R}^m \ni y \mapsto \int f(x,y)\,\mathrm{d}\ell_n(x)$ jest ℓ_m-mierzalna;*
5. *zachodzą równości*

$$\int \int f(x,y)\,\mathrm{d}\ell_n(x)\,\mathrm{d}\ell_m(y) = \int \int f(x,y)\,\mathrm{d}\ell_m(y)\,\mathrm{d}\ell_n(x) = \int f\,\mathrm{d}\ell_{m+n}\,.$$

Twierdzenie (o zamianie zmiennych [Str16, 5.22]). *Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie otwarty, $\Phi : \Omega \to \Phi[\Omega]$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1, $f : \Phi[\Omega] \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n całkowalna (ℓ_n-mierzalna i nieujemna). Wtedy $(f \circ \Phi) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi|$ jest ℓ_n całkowalna (ℓ_n-mierzalna) i zachodzi równość*

$$\int_{\Phi[\Omega]} f\,\mathrm{d}\ell_n = \int_\Omega (f \circ \Phi) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi|\,\mathrm{d}\ell_n\,.$$

---

1. Niech $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie wielomianem o współczynnikach z przedziału $[0,1]$, zaś $K \subseteq \mathbf{R}^2$ będzie kwadratem $[-1,1] \times [-1,1]$. Wykaż, że

   $$\int_K P(xy)\,\mathrm{d}\ell_2(x,y) \leqslant 8\,.$$

   Czy można zmniejszyć stałą 8?

2. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x,\ x^2 y \leqslant 16\}$. Wyznacz $\ell_2(A)$. Czy funkcja $f(x,y) = xy$ jest całkowalna na A?

3. Niech $0 < b < a$. Oblicz całkę

   $$\int_0^\infty x^{-1}\big(\exp(-ax) - \exp(-bx)\big)\,\mathrm{d}\ell_1(x)\,.$$

4. Oblicz miarę Lebesgue'ga zbioru $A \subseteq \mathbf{R}^k$ (tzn. całkę z funkcji charakterystycznej tego zbioru) jeśli

   (a) $k = 2$, $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 < y < 2x^2,\ 2y^2 < x < 3y^2\}$;
   (b) $k = 3$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4,\ z > 1\}$;
   (c) $k = 3$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x^2 + y^2 < x\}$;
   (d) $A = \{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbf{R}^k : \sum_{j=1}^k |\sum_{i=1}^k a_{j,i}x_i| < 1\}$ – $a_{j,i} \in \mathbf{R}$ ustalone;
   (e) $A = \{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbf{R}^k : \sum_{j=1}^k (\sum_{i=1}^k a_{j,i}x_i)^2 < 1\}$ – $a_{j,i} \in \mathbf{R}$ ustalone;

5. Dane są $A \subseteq \mathbf{R}^2$ oraz $f : A \to \mathbf{R}$. Oblicz całkę $\int_A f\,\mathrm{d}\ell_2$ jeśli

   (a) $A = \{(x, y \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < x)\}$ oraz $f(x,y) = x$;
   (b) $A = \mathbf{R}^2$ oraz $f(x,y) = \exp(-x^2 - xy - y^2)$;
   (c) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$ oraz $f(x,y) = (1 - x + y)\exp(-x)$;
   (d) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$ oraz $f(x,y) = 1/(x\sqrt{y})$;
   (e) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant y\}$ oraz $f(x,y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$;
   (f) A jest kwadratem o przekątnej łączącej punkty $(0,\pi)$ i $(\pi, 2\pi)$ oraz $f(x,y) = (x + y)^2\cos^2(x - y)$;

(g) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 < 8y < 8x^2,\ y^2 < x < 8y^2\}$ oraz $f(x,y) = (x/y)^3$;

(h) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < x^3\}$ oraz $f(x,y) = \exp(y/x)$;

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < 1,\ y < x < 1\}$ oraz $f(x,y) = \exp(-x^2)$;

(j) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < \pi,\ x < y < \pi\}$ oraz $f(x,y) = (\sin y)/y$;

(k) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < 1,\ y < x < 1\}$ oraz $f(x,y) = 1/(1+x^4)$;

6. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x < 2y,\ y < 2x,\ x+y < 1,\ 1 < 3x+y\}$. Oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{\left(x^{2n} + y^{2n}\right)^{1/n}}{x^4 y}\, \mathrm{d}\ell_2(x,y)\,.$$

7. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 < 1,\ 0 < z < 2\}$. Wykaż, że granica
$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{z}{n} \ln\bigl((x^2+y^2)^n + (x^2+y^2)^{-n}\bigr)\, \mathrm{d}\ell_3(x,y,z)\,.$$
istnieje i oblicz jej wartość.

8. Niech $k \in \mathbf{N}$ oraz $p \in \mathbf{R}$. Udowodnij, że
$$\int_{\mathbf{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p}\, \mathrm{d}\ell_k(x) < \infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad p < k\,,$$
$$\int_{\mathbf{R}^k \setminus \mathbf{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p}\, \mathrm{d}\ell_k(x) < \infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad p > k\,.$$

Wskazówka. Przedstaw $\mathbf{B}(0,1)$ jako sumę przeliczalnie wielu „skorup” $A_l = \mathbf{B}(0, 2^{-l}) \setminus \mathbf{B}(0, 2^{-l-1})$ dla $l = 0, 1, 2, \ldots$

9. Niech $A \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie ℓ_n-mierzalny, $p \in (0,\infty)$ oraz $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n-mierzalna. Wykaż, że
$$\int_A |f|^p\, \mathrm{d}\ell_n = p \int_0^\infty t^{p-1} \ell_n\bigl(\{x \in A : |f(x)| > t\}\bigr)\, \mathrm{d}\ell_1(t)\,.$$

Wskazówka. Twierdzenie Fubiniego.

10. Niech $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie klasy C^1 i spełnia $\varphi(0) = 0$, zaś $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n całkowalna. Pokaż, że
$$\int \varphi(|f(x)|)\, \mathrm{d}\ell_n(x) = \int_0^\infty \varphi'(t) \ell_n(\{x : |f(x)| > t\})\, \mathrm{d}\ell_1(t)\,.$$

11. Niech $p \in \mathbf{R}$ oraz $k \in \mathbf{N}$ będą takie, że $p < k$. Oblicz całkę
$$\int_{\mathbf{B}^k(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p}\, \mathrm{d}\ell_k(x)\,.$$

Wskazówka. Skorzystaj z zadania 9

Literatura

[Str16] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II (skrypt wykładu), Jan 2016. wersja z dnia: 5.01.2016. URL: `http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/Analiza_Matematyczna_2/Notatki_files/skrypt-amII-05-01-2016.pdf`.