Uwaga. Przez $\mathbb{1}_Z$ oznaczamy funkcję charakterystyczną zbioru Z.

1. Niech $A \subseteq \mathbf{R}^n$ będzie ℓ_n-mierzalny, $p \in (0, \infty)$ oraz $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n-mierzalna. Wykaż, że
$$\int_A |f|^p \, \mathrm{d}\ell_n = p \int_0^\infty t^{p-1} \ell_n(\{x \in A : |f(x)| > t\}) \, \mathrm{d}\ell_1(t) .$$

   Rozwiązanie. Dla $x \in A$ mamy
$$|f(x)|^p = p \int_0^{|f(x)|} t^{p-1} \, \mathrm{d}\ell_1(t) .$$
   zatem, korzystając z twierdzenia Fubiniego,
$$\begin{aligned}\int_A |f|^p \, \mathrm{d}\ell_n &= \int_A \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} \, \mathrm{d}\ell_1(t) \, \mathrm{d}\ell_n(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^\infty pt^{p-1} \mathbb{1}_{\{s: 0 < s < |f(x)|\}}(t) \mathbb{1}_A(x) \, \mathrm{d}\ell_1(t) \, \mathrm{d}\ell_n(x) \\ &= p \int_0^\infty t^{p-1} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbb{1}_{\{s: 0 < s < |f(x)|\}}(t) \mathbb{1}_A(x) \, \mathrm{d}\ell_n(x) \, \mathrm{d}\ell_1(t) \\ &= p \int_0^\infty t^{p-1} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbb{1}_{\{y \in A : |f(y)| > t\}}(x) \, \mathrm{d}\ell_n(x) \, \mathrm{d}\ell_1(t) \\ &= p \int_0^\infty t^{p-1} \ell_n(\{x \in A : |f(x)| > t\}) \, \mathrm{d}\ell_1(t) .\end{aligned}$$

2. **[1 pkt]** Niech $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie niemalejącą funkcją klasy C^1 taką, że $\varphi(0) = 0$, zaś $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie ℓ_n całkowalna. Pokaż, że
$$\int \varphi(|f(x)|) \, \mathrm{d}\ell_n(x) = \int_0^\infty \varphi'(t) \ell_n(\{x : |f(x)| > t\}) \, \mathrm{d}\ell_1(t) .$$

3. **[1 pkt]** Niech $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ będzie funkcją całkowalną i taką, że
$$\ell_n(\{x : |f(x)| > t\}) \leqslant (1 - t^4) \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \quad \text{dla } t > 0 .$$
   Wykaż, że
$$\int |f(x)| \exp(|f(x)|) \, \mathrm{d}\ell_n(x) \leqslant 36e - 96 .$$

4. Niech $p \in \mathbf{R}$ oraz $k \in \mathbf{N}$ będą takie, że $p < k$. Oblicz całkę
$$\int_{\mathbf{B}^k(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p} \, \mathrm{d}\ell_k(x) .$$

   Rozwiązanie. Korzystamy z formuły udowodnionej w zadaniu 1.
$$\int_{\mathbf{B}^k(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p} \, \mathrm{d}\ell_k(x) = p \int_0^\infty t^{p-1} \ell_k(\{x \in \mathbf{B}^k(0,1) : \|x\|^{-1} > t\}) \, \mathrm{d}\ell_1(t) .$$

Zauważmy, że dla $x \in \mathbf{R}^k$ oraz $t \in (0,\infty)$ zachodzi

$$\|x\|^{-1} > t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x\| < t^{-1}$$

zatem

$$\{x \in \mathbf{B}^k(0,1) : \|x\|^{-1} > t\} = \begin{cases} \mathbf{B}^k(0,t^{-1}) & \text{jeśli } t > 1\,, \\ \mathbf{B}^k(0,1) & \text{jeśli } t \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Mamy $\ell_k(\mathbf{B}^k(0,r)) = \boldsymbol{\alpha}(k) r^k$ dla $r \in (0,\infty)$, więc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}^k(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p} \,\mathrm{d}\ell_k(x) &= p \int_0^1 t^{p-1} \boldsymbol{\alpha}(k) \,\mathrm{d}\ell_1(t) + p \int_1^\infty t^{p-1} \boldsymbol{\alpha}(k) t^{-k} \,\mathrm{d}\ell_1(t) \\ &= \boldsymbol{\alpha}(k) - \boldsymbol{\alpha}(k) \frac{p}{p-k} = \frac{k}{k-p} \boldsymbol{\alpha}(k)\,. \end{aligned}$$

5. Wyznacz pochodne cząstkowe funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jeśli

$$f(u,v) = \int_{\mathbf{R}} \exp(-x^2) \sin(ux + vx) \,\mathrm{d}\ell_1(x) \quad \text{dla } (u,v) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Rozwiązanie. Dla $x \in \mathbf{R}$ oraz $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ kładziemy

$$g_x(u,v) = \frac{\sin(ux+vx)}{\exp(x^2)}\,;$$

wówczas,

$$\mathrm{D}_1 g_x(u,v) = \frac{x\cos(ux+vx)}{\exp(x^2)} = \mathrm{D}_2 g_x(u,v) \quad \text{dla } (u,v) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Ustalmy punkt $(u,v) \in \mathbf{R}^2$. Zauważmy, że funkcje g_x oraz $\mathrm{D}_1 g_x$ i $\mathrm{D}_2 g_x$ są ciągłe względem x, u i v oraz zbiegają do zera dla $x \to \pm\infty$ w sposób wykładniczy, co gwarantuje ich całkowalność względem zmiennej x. Zaczniemy od wyznaczenia $\mathrm{D}_1 f(u,v)$. Przedstawiając przyrost funkcji jako całkę z pochodnej oraz wykorzystując twierdzenie Fubiniego dostajemy

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_1 f(u,v) &= \lim_{t\to 0} t^{-1}(f(u+t,v) - f(u,v)) = \lim_{t\to 0} t^{-1} \int_{\mathbf{R}} g_x(u+t,v) - g_x(u,v) \,\mathrm{d}\ell_1(x) \\ &= \lim_{t\to 0} t^{-1} \int_{\mathbf{R}} \int_0^t \mathrm{D}_1 g_x(u+s,v) \,\mathrm{d}\ell_1(s) \,\mathrm{d}\ell_1(x) \\ &= \lim_{t\to 0} t^{-1} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \mathrm{D}_1 g_x(u+s,v) \,\mathrm{d}\ell_1(x) \,\mathrm{d}\ell_1(s) = \lim_{t\to 0} t^{-1} \int_0^t F_v(u+s) \,\mathrm{d}\ell_1(s)\,, \end{aligned}$$

gdzie

$$F_v(w) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{D}_1 g_x(w,v) \,\mathrm{d}\ell_1(x) \quad \text{dla } w \in \mathbf{R}\,.$$

Jeśli F_v jest ciągła, to będziemy mogli skorzystać z całkowego twierdzenia o wartości średniej. Zbadajmy ciągłość F_v. Dla $w_0, w_1 \in \mathbf{R}$ mamy

$$
\begin{aligned}
|F_v(w_1) - F_v(w_0)| &= \left| \int_{\mathbf{R}} \mathrm{D}_1 g_x(w_1, v) - \mathrm{D}_1 g_x(w_0, v) \, \mathrm{d}\ell_1(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbf{R}} \frac{x}{\exp(x^2)} \big(\cos(w_1 x + vx) - \cos(w_0 x + vx)\big) \, \mathrm{d}\ell_1(x) \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbf{R}} \frac{x}{\exp(x^2)} \big|2 \sin\big((w_1 + w_0)x/2 + vx\big) \sin\big((w_0 - w_1)x/2\big)\big| \, \mathrm{d}\ell_1(x) \\
&\leqslant |w_0 - w_1| \int_{\mathbf{R}} \frac{x^2}{\exp(x^2)} \, \mathrm{d}\ell_1(x) \, .
\end{aligned}
$$

Zatem F_v spełnia warunek Lipschitza i jest ciągła. Stosując całkowe twierdzenie o wartości średniej dostajemy

$$
\lim_{t \to 0} t^{-1} \int_0^t F_v(u + s) \, \mathrm{d}\ell_1(s) = F_v(u) \, ;
$$

stąd,

$$
\mathrm{D}_1 f(u, v) = F_v(u) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{D}_1 g_x(u, v) \, \mathrm{d}\ell_1(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{x \cos(ux + vx)}{\exp(x^2)} \, \mathrm{d}\ell_1(x) \, .
$$

Analogicznie

$$
\mathrm{D}_2 f(u, v) = \int_{\mathbf{R}} \frac{x \cos(ux + vx)}{\exp(x^2)} \, \mathrm{d}\ell_1(x) \, .
$$

6. **[1 pkt]** Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie całkowalna. Kładziemy

$$
g(t) = \int_{\mathbf{R}} \cos(tx^2) \frac{f(x)}{1 + x^6} \, \mathrm{d}\ell_1(x) \quad \text{dla } t \in \mathbf{R} \, .
$$

Udowodnij, że g jest różniczkowalna i wyznacz jej pochodną.