Twierdzenie ([Str16, Twierdzenia 3.28 i 3.30])**.** *Niech* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ *będzie otwarty,* $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$*,* $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$*,* $M = F^{-1}\{0\}$*,* $p \in M$*,* $\operatorname{rank} \mathrm{D}F(p) = m$*. Jeśli* $g|_M$ *ma ekstremum lokalne w* p*, to* $\ker \mathrm{D}F(p) \subseteq \ker \mathrm{D}g(p)$ *zatem istnieje wektor* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *taki, że* $\mathrm{D}F(p)^*\lambda = \operatorname{grad} g(p)$.[1]
Ponadto, jeśli g *i* F *są klasy* C^2 *oraz* $L = g - \langle \lambda, F \rangle$*, to*

- *jeśli* $\mathrm{D}^2L(p)|_{T_pM \times T_pM} > 0$ (< 0)*, to* $g|_M$ *ma właściwe minimum (maksimum) w* p*;*
- *jeśli* $\mathrm{D}^2L(p)(w, w) > 0 > \mathrm{D}^2L(p)(v, v)$ *dla pewnych* $w, v \in T_pM$*, to* $g|_M$ *nie ma ekstremum lokalnego w* p*.*

---

1. Wyznacz kres dolny i górny funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze
$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^8 = 14\right\}.$$
2. Płaszczyzna $x + y + z = 12$ przecina paraboloidę $z = x^2 + y^2$. Wyznacz najwyżej i najniżej położony punkt przekroju.
3. Stożek $z^2 = x^2 + y^2$ przecina płaszczyznę o równaniu $x + 2y + 3z = 3$. Znajdź punkty tego przecięcia położone najbliżej i najdalej początku układu współrzędnych.
4. Wyznacz kres dolny i górny funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ na zbiorze
   - $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2\}$;
   - $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2,\ z = 1\}$.
5. Wyznacz kres górny i dolny funkcji $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ na zbiorze S jeśli
   - $f(x, y) = x^2 - y^2$, $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$;
   - $f(x, y) = x^2 + y^2$, $S = \{(x, y) : 2x + 3y = 6\}$;
   - $f(x, y, z) = xyz$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z = 1\}$;
   - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 1,\ x + 2y + 3z = 6\}$.
6. Na elipsie o równaniu $x^2 + 2y^2 = 1$ znajdź punkty, które są położone najbliżej i najdalej od prostej $x + y = 2$.
7. Znajdź zbiór wartości funkcji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze $S = \{(x, y, z) : |x|^3 + |y|^3 + |z|^3 \leqslant 1\}$.
8. Znajdź kresy funkcji $f(x, y, z) = xy - z$ na zbiorze $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z \geqslant 0\}$.

[1] Zauważ, że $\operatorname{im} \mathrm{D}F(p)^* = \ker \mathrm{D}F(p)^{\perp}$.

9. Znajdź kres górny funkcji $f(x, y, z, t) = xt - yz$ na zbiorze

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z + y + z + t = 8,\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 25\}.$$

10. Niech $g(x, y) = xy$ dla $x, y \geqslant 0$. Ustalmy liczby $p, q > 1$ takie, że $p + q = pq$. Dla każdej stałej $c > 0$ niech

$$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^p/p + y^q/q = c\}.$$

Proszę wyznaczyć kresy funkcji g na zbiorze L_c, a następnie udowodnić nierówność $xy \leqslant x^p/p + y^q/q$.

11. Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze S, gdzie

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 \cdots x_m$, $S = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|^2 = 1\}$;
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = y+z$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\,, x^2+y^2 \leqslant x\}$;
  Wskazówka. Wykazać, że wnętrze $\operatorname{int} S$ jest niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^3$, a brzeg $\partial S = S \setminus \operatorname{int} S$ jest rozmaitością. Szukać ekstremów lokalnych znanymi sposobami na każdym z tych zbiorów osobno.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1\right\}$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x}{7} + \frac{y}{5}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 25\}$;
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1\right\}$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5x + 3y$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4\sin(x) = 3\cos(y)\}$.

Uwaga. W niektórych przykładach nie trzeba korzystać z twierdzenia Lagrange'a.

12. Znajdź kres górny funkcji $f(x, y, z) = z^4(x^2 - xy + y^2) + z^2(x^4 + y^4)$ na czworościanie o wierzchołkach $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(4, 4, 0)$.

Literatura

[Str16] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II (skrypt wykładu), Jan 2016. wersja z dnia: 5.01.2016. URL: `http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/Analiza_Matematyczna_2/Notatki_files/skrypt-amII-05-01-2016.pdf`.