Definicja ([?, Definicja 3.23])**.** Zbiór $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ nazywamy *zanurzoną rozmaitością n-wymiarową klasy* C^1 jeśli dla każdego $p \in M$ istnieje $r \in (0, \infty)$, n-wymiarowa podprzestrzeń liniowa $P \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, zbiór otwarty $U \subseteq P$, oraz funkcja $\varphi : P \to P^{\perp}$ klasy C^1 takie, że

$$M \cap \mathbf{B}(p, r) = \Big\{x + \varphi(x) : x \in U\Big\}.$$

---

1. Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1, a $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie rozmaitością klasy C^1. Pokaż, że $\varphi[M]$ też jest rozmaitością klasy C^1.

2. Niech $P \subseteq \mathbb{R}^n$ będą k-wymiarowymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^n$, $f : P \to P^{\perp}$ będzie klasy C^1, $M = \{x + f(x) : x \in P\} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie wykresem funkcji f, $x_0 \in P$, $a = x_0 + f(x_0) \in M$. Pokaż, że istnieją zbiory otwarte $U \subseteq T_a M$ i $V \subseteq P$ oraz funkcja $g : U \to T_a M^{\perp}$ klasy C^1 takie, że

$$x_0 \in V\,, \quad 0 \in U\,, \quad \mathrm{D}g(0) = 0\,, \quad g(0) = 0\,,$$
$$\{x + f(x) : x \in V\} = \{a + y + g(y) : y \in U\}\,.$$

   Wskazówki. Niech $\alpha, \beta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ będą *izometrycznymi* zanurzeniami takimi, że $\alpha[\mathbb{R}^k] = P$ oraz $\beta[\mathbb{R}^k] = T_a M$ (zauważ, że wówczas $\alpha \circ \alpha^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest rzutem ortogonalnym na P). Niech $F : P \to \mathbb{R}^n$ będzie dana przez $F(x) = x + f(x)$ dla $x \in P$. Pokaż, że funkcja $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ dana przez $h = \beta^* \circ F \circ \alpha - \beta^*(F(x_0))$ jest odwracalna na pewnym zbiorze otwartym $G \subseteq \mathbb{R}^k$ zawierającym $\alpha^*(x_0)$. Niech $U = \beta \circ h[G] \subseteq T_a M$ oraz $\bar{g} : U \to \mathbb{R}^n$ będzie dana przez $\bar{g}(z) = F \circ (h|_G)^{-1} \circ \beta^*(z)$; wtedy $g(z) = (\bar{g}(z) - a) - \beta \circ \beta^*(\bar{g}(z) - a)$ dla $z \in U$.

   Wniosek. Jeśli $N \subseteq \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością klasy C^1 i $a \in N$, to istnieją zbiory otwarte $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq T_a N$ zawierające a i 0 odpowiednio oraz funkcja $f : T_a N \to T_a N^{\perp}$ taka, że $N \cap U = \{a + x + f(x) : x \in V\}$, $f(0) = 0$, $\mathrm{D}f(0) = 0$.

3. Niech $n, m, k \in N$, $k \leqslant \min\{m, n\}$, $P \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową przestrzenią liniową, $f : P \to P^{\perp}$ będzie klasy C^1, $f(0) = 0$, $\mathrm{D}f(0) = 0$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie klasy C^1, $M = \{x + f(x) : x \in \mathbb{R}^k\}$ będzie wykresem f. Załóżmy, że $Q = \mathrm{D}\varphi(0)[P]$ jest k-wymiarową podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^m$.

   Pokaż, że istnieje otwarty zbiór $U \subseteq \mathbb{R}^n$ zawierający 0, otwarty zbiór $V \subseteq \mathbb{R}^m$ zawierający $\varphi(0)$ oraz funkcja $h : Q \to Q^{\perp}$ klasy C^1 takie, że $\varphi[M \cap U] = \{y + h(y) : y \in Q\} \cap V$.

   Wskazówki. Wybierz izometryczne włożenia $\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ oraz $\beta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ tak, by $\alpha[\mathbb{R}^k] = P$ oraz $\beta[\mathbb{R}^k] = Q$. Niech $F : P \to \mathbb{R}^n$ będzie dana przez $F(x) = x + f(x)$ dla $x \in P$. Udowodnij, że funkcja $g = \beta^* \circ \varphi \circ F \circ \alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu 0. Dalej pokaż, że w pewnym otoczeniu $\varphi(0)$ zbiór M jest wykresem funkcji $h : Q \to Q^{\perp}$ klasy C^1 danej przez $h(y) = \varphi \circ F \circ g^{-1} \circ \beta \circ \beta^*(y) - y$ dla $y \in Q$ w pewnym otoczeniu $\beta \circ \beta^* \circ \varphi(0)$.

4. Niech $m, n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant \min\{m, n\}$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową rozmaitością klasy C^1, a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie klasy C^1. Załóżmy, że $\mathrm{D}\varphi(x)|_{T_x M}$ jest rzędu k dla wszystkich $x \in M$ oraz $\varphi|_M$ jest różnowartościowa. Pokaż, że $M = \varphi[N]$ jest rozmaitością klasy C^1.

5. Niech $m, n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant \min\{m, n\}$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie klasy C^1, $M = F^{-1}\{0\}$. Załóżmy, że $M \subseteq \operatorname{Int}\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rank} \mathrm{D}F(x) = n - k\}$. Pokaż, że M jest rozmaitością k-wymiarową klasy C^1.

6. Pokaż, że $\mathbf{O}(n) = \{A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : A^* \circ A = I\}$ jest rozmaitością klasy C^1 wymiaru $n(n-1)/2$.

7. Rozpatrzmy funkcję $\varphi : S \to \mathbb{R}^4$ daną wzorem

$$\varphi(x, y, z) = \Big(x^2 - y^2,\, 2xy,\, y^2 - z^2,\, 2yz\Big) \quad \text{dla } (x, y, z) \in S^2\,,$$

gdzie $S = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\|_2 = 1\}$ jest sferą dwuwymiarową. Niech $M = \varphi[S] \subseteq \mathbb{R}^4$.

- Zbadaj dla jakich $p \in S$ istnieje w $\mathbb{R}^3$ otoczenie $U \ni p$ takie, że zbiór $\varphi[U \cap S]$ jest rozmaitością klasy C^1.
- Zbadaj dla jakich punktów $q \in M$ istnieje w $\mathbb{R}^4$ otoczenie $V \ni q$ takie, że zbiór $V \cap M$ jest rozmaitością klasy C^1.

Uwaga. Może się zdarzyć, że dla pewnego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}^3$ zbiór $\varphi[S \cap U]$ jest rozmaitością ale $\varphi[S] \cap \varphi[U]$ nie jest rozmaitością nawet jeśli $\varphi|_U$ jest dyfeomorfizmem, gdyż $\varphi|_S$ nie musi być różnowartościowa.

8. Niech
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^4 + xyz = 4\}\,.$$

- Wykaż, że M jest rozmaitością klasy C^1.
- Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie $(3^{1/3}, 0, -1)$.