**Definicja** ([Str16, Definicja 3.19])**.** Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty. Przekształcenie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazywamy *dyfeomorfizmem klasy* $C^1$ jeśli $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $f$ jest różnowartościowe, $f[\Omega]$ jest otwarty, oraz $f^{-1} \in C^1(f[\Omega], \mathbb{R}^n)$.

---

1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$f(x, y) = \left(x^2 + y - y^2,\ 2xy + y\right).$$
   - Wyznacz wszystkie punkty, w otoczeniu których $f$ ma funkcję odwrotną klasy $C^1$.
   - Wykaż, że punkt o współrzędnych $(2, 1)$ jest jednym z nich.
   - Wyznacz różniczkę funkcji odwrotnej w punkcie $(4, 5)$.

2. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$F(x, y) = \left(u(x, y),\ v(x, y)\right), \quad \text{gdzie} \quad u(x, y) = x(x^3 - 3y^2)\,, v(x, y) = y(3x^2 - y^2)\,.$$
Czy istnieje takie otoczenie punktu $(0, 0)$ na którym $F$ jest bijekcją?

3. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$f(x, y) = \left(f_1(x, y),\ f_2(x, y)\right) = \left(x^2 - 2y + 3y^2,\ xy + y^2\right).$$
   - Uzasadnij, że $f$ zawężona do pewnego otoczenia $U$ punktu $(1, 1)$ jest bijekcją ma pewien zbiór otwarty $V$ zawierający $(2, 2)$.
   - Wyznacz $\mathrm{D}_2(f|_U)^{-1}(2, 2)$.

4. Zbadaj czy równanie $\sin y = x$ określa jednoznacznie funkcję ciągłą $y = y(x)$ na pewnym otoczeniu punktów $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ oraz $(1, \pi/2)$.

5. Wykaż, że istnieje taki $\varepsilon > 0$, że dla $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ istnieje taka funkcja $y = y(x)$ klasy $C^1$, że $x \exp(y(x)) + y(x) \exp(x) = 2$. Czy $y$ jest dwukrotnie różniczkowalna w 0? Jeśli tak, wyznacz $y''(0)$.

6. Wykaż, że układ równań
$$\begin{aligned} x \exp(z + w) &= 2y - zw\,, \\ z^3 - w^3 &= xz + yw\,, \end{aligned}$$
wyznacza w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (3, 1, 1, -1)$ zmienne $(z, w)$ jako funkcje $z = z(x, y)$, $w = w(x, y)$ klasy $C^1$ takie, że $z(3, 1) = 1$ oraz $w(3, 1) = -1$.

   Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie różniczkowalna w $(1, -1)$ oraz $\mathrm{D}_1 f(1, -1) = 2$, $\mathrm{D}_2 f(1, -1) = -4$. Znajdź różniczkę funkcji $g(x, y) = f(z(x, y), w(x, y))$ w punkcie $(3, 1)$.

7. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie klasy $C^1$ i spełnia
$$x\mathrm{D}_1F(x,y) + y\mathrm{D}_2F(x,y) \neq 0 \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$
Pokaż, że równanie $F(x/z, y/z) = 0$ określa lokalnie funkcję $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taką, że
$$x\mathrm{D}_1z(x,y) + y\mathrm{D}_2z(x,y) = z(x,y)\,.$$

8. Pokaż, że w małym otoczeniu punktu $(0,2)$ równanie $x\exp(y) + y\exp(x) = 2$ opisuje ograniczoną funkcję różniczkowalną $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Oblicz $y'(0)$.

9. Wykaż, że równanie
$$z^3 - xyz + y^2 = 16$$
wyznacza w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (1,4,2)$ dokładnie jedną funkcję $z = z(x,y)$. Oblicz $\mathrm{D}_1z(1,4)$ oraz $\mathrm{D}^{(2,0)}z(1,4)$.

10. Wykaż, że równanie $x\ln w + w\ln y = 0$ wyznacza w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, w_0) = (1,1,1)$ zmienną $w$ jako funkcję pozostałych zmiennych $w = g(x,y)$ oraz $g$ jest klasy $C^1$.

    Wyznacz wielomian Taylora stopnia 2 funkcji $g$ w punkcie $(1,1)$.

11. Znajdź dyfeomorfizm zbioru $U$ na $V$ jeśli
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0\}\,, \quad V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 3v^2 < 1,\ 2v > u + |u|\}\,.$$

12. Niech
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \max(x, -x(2+\sqrt{3}))\}\,, \quad H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}\,.$$
Znajdź dyfeomorfizm klasy $C^1$ przekształcający $G$ na $H$.

    *Wskazówka:* $2 + \sqrt{3} = \operatorname{tg} 75°$.

13. Niech $n \geqslant 3$. Rozważmy zbiór $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \text{ dla } i = 1,2,\ldots,n\}$ oraz funkcję
$$F(x_1, \ldots, n_n) = \left(\frac{x_1^2}{x_2}, \frac{x_2^2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}^2}{x_n}, \frac{x_n^2}{x_1}\right)\,.$$
Wykazać, że $F$ jest dyfeomorfizmem zbioru $A$ na ten sam zbiór.

14. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, a $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem klasy $C^1$.
    - Pokaż, że $F[\Omega]$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$.
    - Pokaż, że $F[U] \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
    - Pokaż, że $F[\partial U] = \partial(F[U])$ jeśli $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty.

15. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy $C^1$. Załóżmy, że istnieje stała $M \in (0, \infty)$ taka, że
$$M^{-1}\|x - y\| \leqslant \|F(x) - F(y)\| \leqslant M\|x - y\| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^n$$
(mówimy wówczas, że $F$ jest bilipschitzowska). Pokaż, że $F$ jest dyfeomorfizmem oraz
$$\mathbf{B}(x, M^{-1}r) \subseteq F[\mathbf{B}(x, r)] \subseteq \mathbf{B}(x, Mr) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \text{ oraz } r \in (0, \infty)\,.$$

16. Funkcja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest klasy $C^1$ oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że
$$\langle \mathrm{D}F(x)v, v\rangle \geqslant C\|v\|^2 \quad \text{dla } x, v \in \mathbb{R}^n\,.$$
Udowodnij, że $F$ jest dyfeomorfizmem oraz $F[\mathbb{R}^n] = \mathbb{R}^n$.

17. Przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem klasy $C^1$ przekształcającym zbiór
$$A = \{(x, y) : y = 0\} \quad \text{na zbiór} \quad B = \{(x, y) : y = x^2\}\,.$$
Udowodnić, że $\sup_{x\in\mathbb{R}^2}(\|\mathrm{D}F(x)\| + \|\mathrm{D}F^{-1}(x)\|) = \infty$.

*Wskazówka.* Popatrz na obrazy kwadratów $[-R, R] \times [0, 2R]$ dla $R \in (0, \infty)$ i skorzystaj z zadania 15.

18. Niech $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ oraz $R = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$. Udowodnić, że nie istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taki, że $f(S) = R$.

19. Znajdź dyfeomorfizm ze zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$ jeśli
    - $A$ jest wnętrzem jednostkowej kuli Euklidesową,
    - $A$ jest wnętrzem jednostkowej kuli w metryce indukowanej przez normę $\|\cdot\|_3$,
    - $A$ jest wnętrzem elipsy o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$,
    - $A$ jest wnętrzem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$,
    - $A$ jest wnętrzem trapezu o wierzchołkach $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, 1)$, $(-1/2, 1)$,
    - $A$ jest wnętrzem pięciokąta foremnego o środku w $(0, 0)$ i jednym z wierzchołków w punkcie $(1, 0)$.

20. Znajdź dyfeomorfizm ze zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^3$ jeśli
    - $A$ jest wnętrzem jednostkowej kuli Euklidesową,
    - $A$ jest wnętrzem jednostkowej kuli w metryce indukowanej przez normę $\|\cdot\|_3$,
    - $A$ jest wnętrzem czworościanu o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

# Literatura

[Str16] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II (skrypt wykładu), Jan 2016. wersja z dnia: 5.01.2016. URL: `http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/Analiza_Matematyczna_2/Notatki_files/skrypt-amII-05-01-2016.pdf`.