

Twierdzenie ([Str16, Twierdzenie 2.54]). *Założmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest $(k-1)$ -krotnie różniczkowalna na Ω , kula $\mathbf{B}(a, r) \subseteq \Omega$ dla pewnego $r > 0$ i $D^k f(a)$ istnieje. Wówczas, dla $\|h\| < r$,*

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2!}D^2f(a)h^2 + \dots + \frac{1}{k!}D^k f(a)h^k + R(h),$$

gdzie $R(h)/\|h\|^k \rightarrow 0$ dla $h \rightarrow 0$.

1. Niech $f(x, y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ oraz $f(0, 0) = 0$. Znaleźć drugie pochodne cząstkowe funkcji f . Czy f jest klasy $C^2(\mathbb{R}^2)$?

2. Niech $f(x, y) = x \exp(xy^2)$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wykazać, że f jest dwukrotnie różniczkowalna oraz znaleźć $D^2f(1, 1)hh$, gdzie $h \in \mathbb{R}^2$.

3. Niech $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ oraz $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$. Znaleźć $D^2g(t)$.

4. Wyznaczyć kresy funkcji

$$f(x, y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

5. Wyznaczyć kresy funkcji

$$f(x, y) = \sin(x) \sin(y) \sin(x + y),$$

gdzie $x, y \in [0, \pi]$.

6. Wyznaczyć lokalne minima i maksima funkcji

$$f(x, y, z) = \ln(1 + x^2) \cdot \cos(y) \cdot \exp(y + \sin z) \quad \text{dla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

7. Niech $f(x, y) = x^3y - 3x^2y + y^2$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wyznaczyć wszystkie punkty krytyczne f . Dla każdego punktu krytycznego rozpoznać, czy f ma tym punkcie lokalne ekstremum.

8. Niech

$$f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wykazać, że f ograniczona do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$ ma minimum w punkcie 0 ale nie ma minimum w $(0, 0)$ jako funkcja dwóch zmiennych.

9. Niech $a \in \mathbb{R}$. Znajdź wielomian Taylora stopnia 2 w punkcie $(0, a)$ funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = \exp(xy^2)$. Następnie udowodnij, że funkcja $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x, y) = x^{-1}(\exp(xy^2) - 1)$ przedłuża się na całą przestrzeń \mathbb{R}^2 do funkcji klasy C^1 .

10. Pokaż, że jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ oraz $[a, a+h] \subseteq \Omega$, to istnieje punkt $\theta \in (0, 1)$ taki, że

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n D_i f(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(a + \theta h) h_i h_j.$$

Wskazówka. Skorzystaj ze wzoru Taylora z resztą w postaci Lagrange'a dla funkcji jednej zmiennej $g(t) = f(a + th)$.

11. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

12. Niech $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia $d \in \mathbb{N}$, tzn. istnieją liczby w_α dla $\alpha \in \mathbb{N}^n$ takie, że $W(x) = \sum_{|\alpha| \leq d} w_\alpha x^\alpha$. Pokaż, że istnieją przekształcenia $A_j : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dla $j \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$ takie, że A_j jest j -liniowe i symetryczne oraz

$$W(x) = \sum_{j=0}^d \frac{1}{j!} A_j x^j.$$

13. Niech $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia $d \in \mathbb{N}$. Pokaż, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{W(x)}{\|x\|^d} = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 0.$$

14. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ taka, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - \operatorname{tg}(x) \sin(y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Obliczyć $D_1 D_2 f(0,0) = D^{(1,1)} f(0,0) = D^2 f(0,0)(e_1, e_2)$, gdzie (e_1, e_2) to baza standardowa \mathbb{R}^2 .

15. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Wiadomo, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - \exp(x-y)}{x^2 + y^2} = 2.$$

Obliczyć $D_1 D_2 f(0,0)$.

16. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x,y) = (x^3 - x - y)(2x - y - 2)$. Wiadomo, że $Df(p) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $p \in \{(-2, -6), (-1, -2), (1, 0)\} = A$. Dla każdego $p \in A$ rozpoznać, czy f ma ekstremum lokalne w p .

17. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Czy wynika stąd, że $D^2 f(0) = 0$?

Literatura

- [Str16] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II (skrypt wykładu), Jan 2016. wersja z dnia: 5.01.2016. URL: http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/Analiza_Matematyczna_2/Notatki_files/skrypt-amII-05-01-2016.pdf.