Definicja. Niech X będzie przestrzenią liniową. Zbiór $C \subseteq X$ nazywamy *stożkiem* jeśli

$$\forall v \in C \ \forall t \in (0, \infty) \quad tv \in C\,.$$

Definicja. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, $A \subseteq X$, $a \in A$. Definiujemy *stożek styczny* $T_a A$ jako zbiór tych $w \in X$ dla których istnieje ciąg $x_j \in A \setminus \{a\}$ taki, że

$$\lim_{j\to\infty} x_j = a \quad \text{oraz} \quad \frac{w}{\|w\|} = \lim_{j\to\infty} \frac{x_j - a}{\|x_j - a\|}\,.$$

---

1. Wyznacz pochodną oraz gradient funkcji $f : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \|x\|_2$.
2. Niech $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Definiujemy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

   $$g(x) = \textstyle\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}\,.$$

   Pokaż, że

   $$g'(x) = \textstyle\int_0^1 \mathrm{D}_1 f(x,t)\mathrm{d}t\,.$$

   Wskazówka. Rozpatrz rodzinę funkcji $L = \{l_h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : h \in (-1,1)\}$ daną przez $l_h(x,y) = h^{-1}(g(x+h,y) - g(x,y))$ dla $h \in (-1,1)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Korzystając ze zwartości odcinka $[0,1]$ wykaż jednostajną ciągłość $\mathrm{D}_1 f(x,y)$, a następnie pokaż, że L jest rodziną funkcji równociągłych. Dalej skorzystaj z twierdzenia Arzeli–Ascoliego by pokazać, że l_h zbiega jednostajnie przy $h \to 0$ do $\mathrm{D}_1 f$.
3. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^1 oraz $g : \Omega \to R$ będzie dana wzorem

   $$g(x) = \textstyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{dla } x \in \Omega\,.$$

   Udowodnij, że dla $x \in \Omega$ oraz $v \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

   $$\mathrm{D}g(x)v = \textstyle\int_a^b \mathrm{D}f(x,t)(v,0)\mathrm{d}t\,.$$

   Wskazówka. Rozważ funkcję $g(a,b,c,d) = \int_a^b f(c,d,t)\mathrm{d}t$.
4. Wyznacz pochodne cząstkowe funkcji $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

   $$h(x,y) = \int_{xy}^{x^2} f(xy^2, \exp(xy), t)\mathrm{d}t\,,$$

   gdzie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1.
5. Podziel liczbę $a \in (0, \infty)$ na trzy części tak, by ich iloczyn był największy.
6. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, $\Omega \subseteq X$ będzie otwarty, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to Y$ będzie klasy C^1, $\mathrm{D}f(a)$ będzie ciągłym przekształceniem liniowym oraz $A = f^{-1}[f(a)]$. Pokaż, że $T_a A \subseteq \ker \mathrm{D}f(a)$.

   6$\star$. Niech X i Y będą skończenie wymiarowe. Pokaż, że jeśli istnieją $l \in \mathbb{N}$ oraz $r > 0$ takie, że $\dim \ker \mathrm{D}f(x) = l$ dla każdego $x \in A \cap \mathbf{B}(a,r)$, to $T_a A = \ker \mathrm{D}f(a)$; cf. [**?**, 3.1.18, 3.1.19(2)].

---

7. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in M$, $v \in T_pM$. Dane są dwie funkcje $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 takie, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in M$. Pokaż, że $\mathrm{D}f(p)v = \mathrm{D}g(p)v$.
   Wskazówka. Można skorzystać z zadania 6.
8. Niech X będzie unormowaną przestrzenią liniową, $p \in X$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. Załóżmy, że istnieje $r > 0$ takie, że $\mathbf{B}(p, r) \cap A = \mathbf{B}(p, r) \cap B$. Pokaż, że wówczas $T_pA = T_pB$.
9. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$. Dla każdego $z \in A$ opisz stożek styczny T_zA.
10. Niech $k < n$, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.
   (a) Załóżmy, że $P_1, \ldots, P_l$ są k-wymiarowymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^n$ oraz dla każdej $(n-k)$-wymiarowej podprzestrzeni liniowej $K \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieje $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ takie, że $P_j \cap K = \{0\}$. Pokaż, że $\mathrm{rank}(A) = k$ wtw. wtedy gdy istnieje $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ takie, że $\dim A[P_j] = k$.
   (b) Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie dowolną bazą $\mathbb{R}^n$ zaś $\mathrm{Sh}(k, n-k)$ oznacza zbiór wszystkich permutacji σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, które są rosnące na każdym ze zbiorów $\{1, 2, \ldots, k\}$ oraz $\{k+1, \ldots, n\}$ (każda taka permutacja odpowiada wyborowi pewnych k liczb spośród n liczb). Pokaż, że rodzina $P_\sigma = \mathrm{lin}\{v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\}$ indeksowana permutacjami $\sigma \in \mathrm{Sh}(k, n-k)$ spełnia powyższe założenia.
   (c) Wywnioskuj, że $\mathrm{rank}\, A = k$ wtw. gdy macierz A (zapisana w dowolnych bazach) zawiera k liniowo niezależnych wektorów (pionowych bądź poziomych).
11. Niech $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie klasy C^1. Pokaż, że $\{x \in \mathbb{R}^n : \dim\ker \mathrm{D}f(x) = n-k\}$ jest otwarty.
   Wskazówka. Skorzystaj z zadania 10.
12. Niech $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$G(x, y, z, t) = \Big(z + x^2 + y^2 - 2,\; z + y^2 + t^2 - 2\Big).$$
   Kładziemy $A = G^{-1}\{0\} = \{w \in \mathbb{R}^4 : G(w) = 0\}$. Opisz stożek styczny do A w punkcie $(1, 1, 0, 1)$.
   Wskazówka. Należy założyć prawdziwość twierdzenia z zadania 6$\star$.
13. Niech P, Q, X, Y, Z będą unormowanymi przestrzeniami liniowymi, $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$, $b : X \times Y \to Z$ będzie dwuliniowe, $f : P \to X$, $g : Q \to Y$ i $h(p, q) = b(f(p), g(q))$. Pokaż, że
$$\mathrm{D}b(x, y)(u, v) = b(x, v) + b(u, y) \quad \text{dla } x, u \in X,\ y, v \in Y\,,$$
$$\mathrm{D}h(p, q)(r, s) = b(f(p), \mathrm{D}g(q)s) + b(\mathrm{D}f(p)r, g(q)) \quad \text{dla } p, r \in P,\ q, s \in Q\,.$$
14. Niech $I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będzie dane wzorem $Ix = x$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Definiujemy
$$\mathbf{O}(n) = \Big\{A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : A^* \circ A = I\Big\}.$$
   Opisz równaniami przestrzeń styczną do $\mathbf{O}(n)$ w punkcie I, a następnie w dowolnym punkcie $A \in \mathbf{O}(n)$. Wyznacz wymiar $T_A\mathbf{O}(n)$.
   Wskazówka. Należy założyć prawdziwość twierdzenia z zadania 6$\star$.

15. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwartym i wypukłym otoczeniem 0, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie różniczkowalna. Zakładamy, że $f(0) = 0$ oraz istnieje $C \in (0, \infty)$ takie, że dla wszystkich $x \in \Omega$ przekształcenie $\mathrm{D}f(x)$ jest samosprzężone, dodatnio określone i $\mathrm{trace}(\mathrm{D}f(x)) < C$. Udowodnij, że $\|f(x)\| \leqslant C\|x|$.
    Wskazówka. Twierdzenie o wartości średniej; cf. [**?**, Twierdzenie 2.40]. Małe twierdzenie spektralne; cf. [**?**, VIII,§4].
16. Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takiej, że pochodne cząstkowe f istnieją wszędzie (zatem gradient również), $\nabla f(0,0) = (1,0)$, ale $T_{(0,0)} f^{-1}\{0\}$ zawiera wektory równoległe do $(1,0)$.
    Wskazówka. Zobacz [**?**, Zadanie 2.35].
17. Udowodnić, że jeśli funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia
$$y\mathrm{D}_1 f(x,y) - x\mathrm{D}_2 f(x,y) = 0 \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$
    to istnieje funkcja różniczkowalna $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ taka, że
$$f(x,y) = g(x^2 + y^2) \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,.$$
18. Niech $p \in (0,\infty)$, a $f : (0,\infty)^3 \to R$ będzie funkcją różniczkowalną spełniającą
$$x^{1-p}\mathrm{D}_1 f(x,y,z) = y^{1-p}\mathrm{D}_2 f(x,y,z) = z^{1-p}\mathrm{D}_3 f(x,y,z) \quad \text{dla } (x,y,z) \in (0,\infty)^3\,.$$
    Dowieść, że istnieje funkcja różniczkowalna $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x,y,z) = \varphi(x^p + y^p + z^p)$.
19. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ taka, że
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \operatorname{tg}(x)\sin(y)}{x^2 + y^2} = 0\,.$$
    Obliczyć $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(0,0) = \mathrm{D}^{(1,1)} f(0,0) = \mathrm{D}^2 f(0,0)(e_1, e_2)$, gdzie (e_1, e_2) to baza standardowa $\mathbb{R}^2$.

Zadania dodatkowe

20. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^2 i spełnia
$$f(0) = 0\,, \quad f(\lambda x) = |\lambda| f(x) \quad \text{dla } \lambda \in \mathbb{R} \text{ i } x \in \mathbb{R}^4\,,$$
$$\mathrm{D}^{(2,0,0,0)} f(x) + \mathrm{D}^{(0,2,0,0)} f(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \mathrm{D}^{(0,0,2,0)} f(x) + \mathrm{D}^{(0,0,0,2)} f(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^4\,.$$
    Udowodnij, że $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}^4$.