1. Znajdź pochodne cząstkowe funkcji:
   (a) $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x^{yz}$,
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x \exp(y) \ln(z) + \operatorname{arctg}(x/z)$,
   (c) $f : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \|x\|_2$,
   (d) $f : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = \exp(xy) + \sin^2(z) + x^z$,
   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = y^2 \exp(x) + x^2 \exp(y)$.
2. Wyznacz pochodną oraz gradient funkcji $f : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \|x\|_2$.
3. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jeśli

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$f(z) = \begin{cases} \|z\|_2^2 \sin(\|z\|_2^{-2}) & \text{dla } z \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \\ 0 & \text{dla } z = 0 \in \mathbb{R}^k \end{cases}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{dla } y \neq 0 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases},$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}\,.$$

4. Znajdź pochodną funkcji $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x^{yz}$ w punkcie $(1, 1, 1)$ w kierunku wektora $(1, 2, 0)$.
5. Zbadaj istnienie pochodnej kierunkowej $\mathrm{D}_v f(p)$ jeśli

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\exp(xy)-1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla x = 0} \end{cases},$$
$$p = (0,1)\,, \quad v \in \{(1,1)\,,\,(1,0)\}\,.$$

6. Zbadaj istnienie pochodnej kierunkowej $\mathrm{D}_v f(p)$ jeśli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^5\}$ oraz $p \in M$ i v jest wektorem stycznym do M w p.
7. Niech $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^5\}$, $p \in M$, $v \in T_p M$. Dane są dwie funkcje różniczkowalne $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in M$. Pokaż, że $\mathrm{D}f(p)v = \mathrm{D}g(p)v$.
8. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem

$$f(x,y) = \left(x^2 + y - y^2,\, 2xy + y\right).$$

   Wyznacz pochodną funkcji odwrotnej do f w punkcie $(4, 5)$.

9. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie taka, że dla (x, y) w pewnym otoczeniu punktu $(2, 1)$ zachodzi wzór
$$f(x^2 + y - y^2,\, 2xy + y) = \big(3x, 2y\big)\,.$$
Wyznacz pochodną funkcji f w punkcie $(4, 5)$.

10. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$. Dla każdego $z \in A$ opisz stożek styczny T_zA.

11. Niech $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$G(x, y, z, t) = \Big(z + x^2 + y^2 - 2,\; z + y^2 + t^2 - 2\Big)\,.$$
Kładziemy $A = G^{-1}\{0\} = \{w \in \mathbb{R}^4 : G(w) = 0\}$. Opisz stożek styczny do A w punkcie $(1, 1, 0, 1)$.

12. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie wykresem pewnej funkcji gładkiej typu $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $p \in M$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie gładkie i takie, że $\mathrm{D}f(p)$ jest izomorfizmem liniowym, $v \in \mathbb{R}^n$ będzie wektorem prostopadłym do T_pM. Pokaż, że wektor $w = (\mathrm{D}f(p)^{-1})^*v$ jest prostopadły do $T_{f(p)}f[M]$.

   Uwaga. Dziedzina i przeciwdziedzina f wyposażone są w pewne iloczyny skalarne (niekoniecznie standardowe) definiujące pojęcia prostopadłości i względem których wyznaczone jest przekształcenie sprzężone do $\mathrm{D}f(p)^{-1}$.

   Zadanie z $\star$: Załóżmy, że $\|v\| = 1$. Oblicz $\|w\|$.

13. Niech $v \in \mathbb{R}^2$. Opisz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że $\mathrm{D}_vf(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}^2$.

14. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Wiadomo, że f spełnia
$$x\mathrm{D}_1f(x, y) + y\mathrm{D}_2f(x, y) = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$
Wykaż, że f jest funkcją stałą.

15. Załóżmy, że $K \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zwarty, wypukły i zawiera pewne otoczenie punktu $(0, 0)$. Dana jest funkcja ciągła $f : K \to \mathbb{R}$, różniczkowalna we wnętrzu zbioru K i spełniająca
$$x\mathrm{D}_1f(x, y) + y\mathrm{D}_2f(x, y) > 0 \quad \text{dla } (x, y) \in K \setminus \{(0, 0)\}\,.$$
Wykaż, że f ma globalne minimum w punkcie $(0, 0)$, a maksimum jest przyjmowane na brzegu zbioru K.

16. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia warunek
$$\sum_{i=1}^{n} x_i\mathrm{D}_if(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_if(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}^n\,.$$
Wykaż, że na każdym zbiorze zwartym i wypukłym $K \subseteq \mathbb{R}^n$ funkcja f osiąga swój kres dolny w pewnym punkcie brzegu ∂K.

   Wskazówka. Niech $v = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ zbadaj zachowanie funkcji $g(t) = f(x + t(x - v))$.

Zadania dodatkowe

Niech $I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będzie dane przez $Ix = x$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

17. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie różniczkowalna, $p \in \mathbb{R}^k$, $M = f^{-1}\{p\}$. Załóżmy, że $\operatorname{rank} \mathrm{D}f(x) = n - k$ dla wszystkich $x \in M$. Udowodnij, że

$$T_x M = \ker \mathrm{D}f(x) \quad \text{dla } x \in M\,.$$

18. Definiujemy

$$\mathbf{O}(n) = \Big\{ A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : A^* \circ A = I \Big\}\,.$$

Opisz równaniami przestrzeń styczną do $\mathbf{O}(n)$ w punkcie I, a następnie w dowolnym punkcie $A \in \mathbf{O}(n)$.

19. Definiujemy

$$\mathbf{G}(n,m) = \Big\{ P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : P \circ P = P,\ P^* = P,\ \mathrm{rank}(P) = m \Big\}\,.$$

Jeśli $Q \in \mathbf{G}(n,m)$, to kładziemy $Q^\perp = I - Q$. Niech $P \in \mathbf{G}(n,m)$. Udowodnij, że

$$T_P \mathbf{G}(n,m) = \Big\{ A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : A^* = A,\ P \circ A \circ P = 0,\ P^\perp \circ A \circ P^\perp = 0 \Big\}\,.$$

20. Definiujemy

$$\mathbf{SL}(n) = \Big\{ A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \det A = 1 \Big\}\,.$$

Opisz równaniami przestrzeń styczną do $\mathbf{SL}(n)$ w punkcie I, a następnie w dowolnym punkcie $A \in \mathbf{SL}(n)$.