1. Wyznaczyć bezpośrednio z definicji różniczki w zerze i w dowolnym punkcie poniższych funkcji
   (a) $f(x) = Ax$, gdzie $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$,
   (b) $f(x) = Ax + g(x)$, gdzie $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ oraz wiadomo, że $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{\|x\|_2} = 0$,
   (c) $f(x) = \|x\|_2^4$,
   (d) $f(x) = B(x, x)$, gdzie $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest przekształceniem dwuliniowym.
2. Niech $x \in \mathbb{R}^n$. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, że pochodna kierunkowa $\mathrm{D}_v f(x)$ istnieje i *jest dodatnia* dla wszystkich $v \in \mathbb{R}^n$?
3. Niech $v \in \mathbb{R}^n$. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, że pochodna kierunkowa $\mathrm{D}_v f(x)$ istnieje i *jest dodatnia* dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$?
4. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v, x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pokaż, że jeśli $\mathrm{D}_v f(x)$ istnieje, to
$$\mathrm{D}_{\alpha v} f(x) = \alpha \mathrm{D}_v f(x)\,.$$
5. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u, v, x \in \mathbb{R}^n$. Czy z istnienia $\mathrm{D}_v f(x)$ i $\mathrm{D}_u f(x)$ wynika istnienie $\mathrm{D}_{u+v} f(x)$?
6. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie otwarty i wypukły, a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $\mathrm{D}_1 f(x)$ i $\mathrm{D}_2 f(x)$ istnieją dla wszystkich $x \in \Omega$. Ponadto istnieje stała $M \in (0, \infty)$ taka, że $|\mathrm{D}_i f(x)| \leqslant M$ dla wszystkich $x \in \Omega$ oraz $i \in \{1, 2\}$. Pokaż, że
$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\|x - y\|_1 \quad \text{dla } x, y \in \Omega$$
   Czy powyższe oszacowanie będzie prawdziwe jeśli opuścimy założenie o wypukłości Ω?
7. Niech $v \in \mathbb{R}^2$. Opisz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że $\mathrm{D}_v f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}^2$.
8. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0)\,, \quad f(0, 0) = 0\,.$$
   (a) Zbadaj ciągłość f w punkcie $(0, 0)$ i wyznacz pochodną kierunkową $\mathrm{D}_v f(0, 0)$ dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Niech $g = f^2$. Zbadaj ciągłość g w punkcie $(0, 0)$ i wyznacz pochodną kierunkową $\mathrm{D}_v g(0, 0)$ dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^2$.
9. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $\mathrm{D}_v f(0)$ istnieje dla każdego $v \in \mathbb{R}^2$. Czy musi zachodzić
$$\mathrm{D}_{u+v} f(0) = \mathrm{D}_u f(0) + \mathrm{D}_v f(0) \quad \text{dla } u, v \in \mathbb{R}^2\,?$$

10. Określić maksymalny podzbiór dziedziny na którym podane funkcje są różniczkowalne. Dla każdej z funkcji wyznacz macierz różniczki (w bazie standardowej) tam gdzie istnieje.

    (a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,
    (b) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2+y^2}$,
    (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy + yz + zx$,
    (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \exp(xy)$,
    (e) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^4 + y^3 = 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^5+y^4+x^2y^4}{x^4+y^3}$,
    (f) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : 1 - xy = 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$,
    (g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

11. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $f(0) = \pi/2$, $\mathrm{D}_k f(0) = k$ dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Oblicz pochodną funkcji
$$g(t) = \cos\Big(f(t, t^2, \dots, t^n)\Big) \quad \text{w punkcie } t = 0\,.$$

12. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x, y) = (x^3 - x - y)(2x - y - 2)$. Wiadomo, że $\mathrm{D}f(p) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $p \in \{(-2, -6), (-1, -2), (1, 0)\} = A$. Dla każdego $p \in A$ rozpoznać, czy f ma ekstremum lokalne w p.

13. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\}$ oraz $f : A \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + xy)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y & \text{dla } x = 0\,. \end{cases}$$
Wykaż różniczkowalność f w punktach $(0, 0)$ oraz $(0, 2)$.

14. Wyznaczyć kres górny funkcji $f(x, y) = x(y - x - 1)e^{-y}$ na zbiorze $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y\}$.

15. Wykaż, że funkcja dana przez $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(1/\sqrt{x^2 + y^2})$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$ oraz $f(0, 0) = 0$ jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru $U = \mathbf{B}(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ ale nie jest klasy C^1.

16. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia warunek
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{D}_i f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}^n\,.$$
Wykaż, że na każdym zbiorze zwartym i wypukłym $K \subseteq \mathbb{R}^n$ funkcja f osiąga swój kres dolny w pewnym punkcie brzegu ∂K.

    Wskazówka. Niech $v = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ zbadaj zachowanie funkcji $g(t) = f(x + t(x - v))$.

Zadania dodatkowe

Niech $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$ będzie zbiorem wszystkich automorfizmów $\mathbb{R}^n$, $I \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$ będzie dane przez $Ix = x$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Normę na $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definiujemy przez $\|A\| = \sup\{\|Av\| : v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| \leqslant 1\}$. Standardowy iloczyn skalarny wektorów $u, v \in \mathbb{R}^n$ oznaczamy przez $\langle u, v \rangle$. Przez $\operatorname{trace} A$ oznaczamy ślad przekształcenia liniowego $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

17. Niech $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką taką, że $s'(-1) = 0 = s'(1)$, a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie rzutowaniem na kulę jednostkową w normie $\|\cdot\|_\infty$ (czyli kwadrat), tzn.
$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\|z\|_\infty} & \text{jeśli } \|z\|_\infty > 1 \\ z & \text{jeśli } \|z\|_\infty \leqslant 1\,. \end{cases}$$
Definiujemy $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $h(x, y) = (s(x), s(y))$. Pokaż, że funkcja $h \circ f$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathrm{D}(h \circ f) = \mathrm{D}h \circ f$.

18. Niech $f : \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ będzie dane przez $f(A) = \det A$ dla $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Udowodnij, że
$$\mathrm{D}f(I)A = \operatorname{trace} A \quad \text{dla } A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\,.$$

19. Niech $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ oraz $t \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli $\|tA\| < 1$, to
$$(I + tA)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j t^j A^j\,.$$

20. Funkcja $f : \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$ jest dana wzorem $f(A) = A^{-1}$ dla $A \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$. Wyznacz $\mathrm{D}f(I)$, a następnie $\mathrm{D}f(X)$ dla dowolnego $X \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$.

21. Niech X, Y, Z będą unormowanymi przestrzeniami liniowymi $\Omega \subseteq X$ będzie otwarty, $v \in Y$, $f : \Omega \to \operatorname{Hom}(Y, Z)$, $g : \Omega \to Z$ będzie dana wzorem $g(x) = f(x)v$ dla $x \in \Omega$. Pokaż, że jeśli $\mathrm{D}f(x) \in \operatorname{Hom}(X, \operatorname{Hom}(Y, Z))$ istnieje dla pewnego $x \in \Omega$, to
$$(\mathrm{D}f(x)u)v = \mathrm{D}g(x)u \quad \text{dla każdego } u \in X\,.$$

22. Dana jest funkcja gładka $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ taka, że $\|\gamma'(t)\| = 1$ dla $t \in \mathbb{R}$. Niech $\tau : \mathbb{R} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będzie takie, że $\tau(t)$ to rzutowanie ortogonalne na przestrzeń (linię) rozpiętą przez $\gamma'(t)$. Udowodnij, że
$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0 \quad \text{oraz} \quad \tau'(t)(\gamma'(t)) = \gamma''(t) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}\,.$$

23. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $p \in \mathbb{R}^n$ oraz $\mathrm{D}f(p) = 0$. Dla $v \in \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ definiujemy funkcję $g_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $g_v(t) = f(p + tv)$ oraz liczbę $\varepsilon(v) = \inf\{t \in (0, \infty) : g_v'(t) = 0\}$. Załóżmy, że dla każdego $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ funkcja g_v ma minimum lokalne w 0 oraz $\inf\{\varepsilon(v) : v \in \mathbb{S}^{n-1}\} > 0$. Pokaż, że wówczas f ma minimum lokalne w p.