Definicja 1. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest *niespójny* jeśli istnieją dwa zbiory otwarte $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ takie, że
$$A \subseteq U \cup V\,, \quad A \cap U \neq \varnothing\,, \quad A \cap V \neq \varnothing\,, \quad A \cap U \cap V = \varnothing\,.$$
Zbiór A jest *spójny* jeśli nie jest niespójny.
Każdy maksymalny spójny podzbiór A nazywa się *spójną składową* zbioru A.

Definicja 2. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem punktów w $\mathbb{R}^k$ oraz $g \in \mathbb{R}^k$. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zbiega do* g jeśli $\lim_{n\to\infty} \|x_n - g\| = 0$.

Definicja 3. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in A$ oraz $f : A \to \mathbb{R}^k$. Mówimy, że f jest *ciągła w* x jeśli
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in A \quad \|y - x\| \leqslant \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon\,.$$

1. Wyznacz granice funkcji lub wykaż, że nie istnieją.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}\,, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ x\neq y}} \frac{x^5 - y^5}{x - y}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}\,,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^3}\,,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\exp(-x^2 - y^2) - 1}{\sin(x^2 + y^2)}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\exp(-1/(x^2 + y^2))}{x^4 + y^4}\,,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \ln(x^2 + y^2)\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sin(x^2 + y^2)}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}\,.$$

2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$. Wykaż, że
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0\,, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0\,, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ nie istnieje}\,.$$

3. Niech $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x,y) = (x+y)\sin(1/x)\sin(1/y)$. Wykaż, że
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ istnieje} \quad \text{ale} \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0 \text{ nie istnieje}\,.$$

4. Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji $f, g, k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oraz $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ danych wzorami
$$f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x,y) \neq (0,0)\,, \quad f(0,0) = 0\,,$$
$$g(x,y) = \frac{2xy^3 + x^2y^3}{x^4 + 2y^4} \quad \text{dla } (x,y) \neq (0,0)\,, \quad g(0,0) = 0\,,$$
$$h(x,y) = \left(\frac{xy}{x+y}, \frac{x+y}{x^3+y^3}\right) \quad \text{dla } x + y \neq 0\,, \quad h(x,y) = (0,3) \quad \text{dla } x + y = 0\,,$$
$$k(x,y) = \frac{x - y}{x^3 - y} \quad \text{dla } y \neq x^3\,, \quad k(x,y) = 1 \quad \text{dla } y = x^3\,.$$

5. Wyznaczyć granice lub wykazać, że nie istnieją.
$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4}+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4}+\frac{1}{y}}\,, \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z^2\sin(x^2+y^2)}{x^2y+z^2}\,.$$
6. Funkcje $f, g, h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:
$$f(x,y) = \frac{y^2}{y^2+(x-y^2)^2}\,, \quad g(x,y) = f(x,y)(x+y)\,, \quad h(x,y) = |x|^{\ln|y|}\,.$$
Dla $k \in \{f, g, h\}$:
   (a) obliczyć granice iterowane $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} k(x,y)$ oraz $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} k(x,y)$;
   (b) obliczyć granicę funkcji k w punkcie $(0,0)$ wzdłuż prostej opisanej równaniem $Ax + By = 0$, gdzie $A, B \in \mathbb{R}$;
   (c) stwierdzić i uzasadnić czy istnieje granica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} k(x,y)$;
   (d) zbadać istnienie granicy $\lim_{|x|\to\infty} k(x)$.
7. Niech $n \geqslant 2$ oraz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Ponadto wiadomo, że istnieją $a, b \in \mathbb{R}^n$ takie, że $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Pokaż, że f ma nieskończenie wiele punktów zerowych.
8. Niech $A = [1,2] \times [0, 2\pi)$, przekształcenie $f : A \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem
$$f(x,y) = (x\cos y, x\sin y) \quad \text{oraz} \quad B = f[A]\,.$$
Udowodnij, że f jest ciągłe i różnowartościowe ale $f^{-1} : B \to A$ nie jest ciągłe.
9. Czy poniższe odwzorowania $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ są ciągłe, różnowartościowe i „na”?
$$f(x,y) = (2x+3y+1, 7x-y-3)\,, \quad g(x,y) = (2x+3y, x^2-y^2)\,.$$
10. Znajdź przekształcenie ciągłe, różnowartościowe i „na” $f : \mathbb{R}^n \to \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$.
11. Znajdź przekształcenie ciągłe i „na” $f : \mathbb{R}^n \to \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leqslant 1\}$. Udowodnij, że jeśli f jest różnowartościowe to odwzorowanie odwrotne do f nie może być ciągłe.
Wskazówka. Obraz zbioru zwartego przez funkcję ciągłą jest zwarty.
12. Niech $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Opisz wszystkie składowe spójności A.
13. Naszkicuj poziomice funkcji
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = x^2 - y^2\,,$$
$$f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0\} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = \sqrt{xy}\,,$$
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = x^2 + y^2\,,$$
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = (x+y)^2\,,$$
$$f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = \frac{y}{x}\,,$$
$$f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = x^y\,,$$
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = |x| + y\,,$$

Zadania dodatkowe

Definicja 4. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zbiór $U \subseteq A$ nazywany *otwartym w A* jeśli istnieje zbiór otwarty V w $\mathbb{R}^n$ taki, że $U = A \cap V$. Zbiór $F \subseteq A$ nazywany *domkniętym w A* jeśli istnieje zbiór domknięty H w $\mathbb{R}^n$ taki, że $F = A \cap H$.

14. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pokaż, że $f : A \to \mathbb{R}^k$ jest ciągła *wtedy i tylko wtedy* gdy dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}^k$ przeciwobraz $f^{-1}[U]$ jest otwarty w A.

15. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pokaż, że każda spójna składowa $B \subseteq A$ zbioru A jest zbiorem domkniętym w A.

16. Niech
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) = \Big\{A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \mathrm{rząd}(A) = n\Big\}.$$
Pokaż, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ jest niespójny.

Wskazówka. Obraz zbioru spójnego przez funkcję ciągłą jest spójny.