1. Niech $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem o współczynnikach z przedziału $[0, 1]$, zaś $K \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie kwadratem $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Wykaż, że

$$\int_K P(xy)\,\mathrm{d}\lambda_2(x, y) \leqslant 8\,.$$

Czy można zmniejszyć stałą 8?

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie mierzalna i ograniczona. Kładziemy

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx^2)\frac{f(x)}{1 + x^6}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}\,.$$

Udowodnij, że g jest różniczkowalna i znajdź g'.

3. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\sin(u + v)x\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,.$$

Wyznacz pochodne cząstkowe f.

4. Niech $0 < b < a$. Oblicz całkę

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,.$$

5. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$ oraz $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y) = (1 - x + y)\exp(-x)$. Oblicz całkę $\int_A f\,\mathrm{d}\lambda_2$.

6. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x,\ x^2y \leqslant 16\}$. Wyznacz $\lambda_2(A)$. Czy funkcja $f(x, y) = xy$ jest całkowalna na A?

7. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$ oraz $f(x, y) = 1/(x\sqrt{y})$ dla $(x, y) \in A$. Oblicz całkę $\int_A f\,\mathrm{d}\lambda_2$.

8. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant y\}$ oraz $f(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \in A$. Oblicz $\int_A f\,\mathrm{d}\lambda_2$.

9. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^w,\ w \in \mathbb{Q},\ 0 \leqslant w \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Wykaż, że A jest λ_2-mierzalny i oblicz $\lambda_2(A)$.

10. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2y,\ y < 2x,\ x + y < 1,\ 1 < 3x + y\}$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{\left(x^{2n} + y^{2n}\right)^{1/n}}{x^4y}\,\mathrm{d}\lambda_2(x, y)\,.$$

11. Niech $K \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie kwadratem o wierzchołkach $(0,\pi)$ oraz $(\pi, 2\pi)$. Oblicz

$$\int_K (x+y)^2 \cos^2(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,.$$

12. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 8y < 8x^2,\ y^2 < x < 8y^2\}$. Oblicz

$$\int_A \left(\frac{x}{y}\right)^3 \mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,.$$

13. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2+y^2 < 1,\ 0 < z < 2\}$. Wykaż, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{z}{n} \ln\Big((x^2+y^2)^n + (x^2+y^2)^{-n}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)\,.$$

istnieje i oblicz jej wartość.

14. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie λ_n-mierzalny, $p \in (0,\infty)$ oraz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n-mierzalna. Wykaż, że

$$\int_A |f|^p\,\mathrm{d}\lambda_n = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_n\Big(\Big\{x \in A : |f(x)| > t\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)\,.$$

Wskazówka. Twierdzenie Fubiniego.

15. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n-całkowalna. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego zbioru λ_n-mierzalnego $A \subseteq \mathbb{R}^n$ spełniającego $\lambda_n(A) \leqslant \delta$ zachodzi $\int_A f\,\mathrm{d}\lambda_n \leqslant \varepsilon$.

Wskazówka. Rozważ miarę μ daną przez całkowanie λ_n z gęstością zadaną przez $|f|$.

16. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n-całkowalna. Dla $r > 0$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ kładziemy

$$g_r(x) = \frac{1}{\lambda_n(\mathbb{B}(x,r))} \int_{\mathbf{B}(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}\lambda_n(y)\,.$$

(a) Pokaż, że dla każdego $r > 0$ funkcja g_r jest ciągła,

$$\int |g_r(x)|\,\mathrm{d}\lambda_n(x) \leqslant \int |f(x)|\,\mathrm{d}\lambda_n(x)\,.$$

(b) Pokaż, że jeśli f jest ciągła, to g_r zbiega niemal jednostajnie do f przy $r \downarrow 0$.

17. [$\star$] Pokaż, że dla f i g_r jak w poprzednim zadaniu (f jedynie λ_n-całkowalna) zachodzi

$$\lim_{r\downarrow 0} \int |g_r(x) - f(x)|\,\mathrm{d}\lambda_n(x) = 0\,.$$

Wywnioskuj, że jeśli $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest λ_1-całkowalna oraz $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia

$$k(b) - k(a) = \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}\lambda_1(t) \quad \text{dla wszystkich } a, b \in \mathbb{R} \text{ takich, że } a < b,$$

to k jest różniczkowalna λ_1-prawie wszędzie oraz $k'(x) = h(x)$ dla λ_1-prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

18. Oblicz

$$\int \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,.$$

Wskazówka. Oblicz kwadrat powyższego wyrażenia korzystając z twierdzenia Fubiniego i zamiany zmiennych.

19. Oblicz

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} \exp(y/x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,,$$
$$\int_0^1 \int_y^1 \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,,$$
$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,,$$
$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,.$$

20. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym przez parabolę o równaniu $y = x^2$ oraz prostą o równaniu $x + y = 2$. Oblicz

$$\int_D 6x + 2y^2\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,.$$

21. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym krzywymi o równaniach $y = x^2$ oraz $y = x^3$. Oblicz

$$\int_D xy^2\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,.$$

22. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie mierzalny i taki, że $\lambda_n(A) > 0$. Udowodnij, że rzut ortogonalny A na dowolną k-wymiarową podprzestrzeń liniową $\mathbb{R}^n$ ma dodatnią miarę λ_k.