1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie monotoniczna. Udowodnij, że f jest λ_1-mierzalna.

2. Udowodnij, że funkcja charakterystyczna zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest λ_n-mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy A jest λ_n-mierzalny.

3. Udowodnij, że funkcje

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lfloor x \rfloor}{1 + n^5 \lfloor x \rfloor^2}$$
$$\text{oraz} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lfloor xy \rfloor}{1 + n^3 \lfloor x^2 + y^2 \rfloor}$$

są mierzalne.

4. Niech $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Udowodnij, że f' jest funkcją mierzalną.

5. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f_n(x,y) = \exp(-n|x^2 - y|)$. Udowodnij, że ciąg f_n zbiega λ_2-prawie wszędzie do funkcji zerowej.

6. Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbiega λ_1-prawie wszędzie do $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że istnieje funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz λ_1-prawie wszystkich x zachodzi $|f_n(x)| < g(x)$. Udowodnij, że $|f(x)| \leqslant g(x)$ dla λ_1-prawie wszystkich x.

7. Niech $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą dane wzorem

$$f_n(x,y) = \exp\left(\sin^n(x) + \sqrt[n]{|\sin(y/n)|}\right)\,.$$

Udowodnij, że ciąg f_n jest zbieżny λ_2-prawie wszędzie i znajdź jego granicę.

8. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, a δ_x będzie miarą Diraca z atomem w punkcie x. Wyznacz

$$\int f \,\mathrm{d}\delta_x\,.$$

9. Niech $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będą λ_n-całkowalne. Załóżmy, że $\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Pokaż, że

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int g \,\mathrm{d}\lambda_n\,.$$

10. Niech $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $f(0) = 1$. Czy f jest całkowalna na $\mathbb{R}$?

11. Podaj przykład ciągu funkcji λ_1-całkowalnych $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ takiego, że f_n zbiega λ_1-prawie wszędzie do pewnej funkcji λ_1-całkowalnej $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ oraz

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) < \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,.$$

12. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem
$$f_n(x) = \frac{2 + \sin^n(x^2)}{1 + x^2}.$$
Wykaż, że granica
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]} f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda_1(x)$$
istnieje i znajdź jej wartość.

13. [Egzamin 2011/2012] Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem
$$f_n(x, y) = \sin^n(y - x) \exp(-x^2 - 3y^2).$$
Wykaż, że granica
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{(x,y):x^2+2y^2<n^2\}} f_n \, \mathrm{d}\lambda_2$$
istnieje i znajdź jej wartość.

14. [Egzamin 2011/2012] Wykaż, że granica
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-2\pi n}^{2\pi n} \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \exp(-2x^2)\, \mathrm{d}\lambda_1(x)$$
istnieje i znajdź jej wartość.

15. [Nierówność Czebyszewa] Niech μ będzie miarą na X oraz $f : X \to \mathbb{R}$ będzie μ-całkowalna. Pokaż, że
$$\mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \leqslant \frac{1}{t} \int f \, \mathrm{d}\mu.$$
Wywnioskuj, że jeśli $\mu(X) < \infty$ oraz $K \in (0, \infty)$, to
$$\mu\Big(\Big\{x \in X : f(x) > K\mu(X)^{-1} \textstyle\int f \, \mathrm{d}\mu\Big\}\Big) \leqslant \frac{\mu(X)}{K}.$$

16. Niech $y_n \in [0, 1]$ będzie dowolnym ciągiem. Czy funkcja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{|x - y_n|}}$$
jest λ_1-całkowalna na $[0, 1]$?

17. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \exp(-\cos^n(x))\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n(\exp(x/n)-1)\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty x^{-3}n\ln(1+x/n)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,.$$

Definicja. Mówimy, że $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest *absolutnie ciągła* jeśli istnieje funkcja λ_1 całkowalna $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taka, że

$$f(b)-f(a)=\int_a^b g\,\mathrm{d}\lambda_1 \quad \text{dla } a<b\,.$$

Uwaga. Każda funkcja absolutnie ciągła jest λ_1 prawie wszędzie różniczkowalna.

18. Niech $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ będzie λ_2-całkowalna taka, że dla λ_1 prawie wszystkich $y\in\mathbb{R}$ funkcja $x\mapsto f(x,y)$ jest absolutnie ciągła oraz $\mathrm{D}_1 f$ jest λ_2 całkowalna. Dla $x\in\mathbb{R}$ kładziemy

$$g(x)=\int f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,.$$

Pokaż, że g jest absolutnie ciągła oraz

$$g'(x)=\int \mathrm{D}_1 f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) \quad \text{dla } \lambda_1 \text{ prawie wszystkich } x\in\mathbb{R}\,.$$

Wskazówka. Twierdzenie Fubiniego.

19. Niech μ-będzie miarą na X, $f_n : X\to\mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji μ-całkowalnych, a $p\in[1,\infty)$. Udowodnij, że

(a) jeśli f_n zbiega jednostajnie, to zbiega w $L^p(\mu)$ oraz μ-prawie wszędzie;

(b) jeśli f_n zbiega w $L^p(\mu)$, to zbiega μ-według miary;

(c) jeśli f_n zbiega μ-prawie wszędzie, to zbiega μ-według miary;

(d) jeśli f_n zbiega μ-według miary, to istnieje podciąg zbieżny μ-prawie wszędzie.

Dla każdej implikacji znajdź przykład ciągu f_n pokazujący, że implikacja odwrotna nie zachodzi.