1. Które z poniżysz rodzin są σ-ciałami?
   (a) $\{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ lub } \mathbb{R} \setminus X \text{ zawiera niepusty przedział otwarty}\}$,
   (b) $\{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ lub } \mathbb{R} \setminus X \text{ jest co najwyżej przeliczalny}\}$,
   (c) $\{\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i \cup Z_i : Y_i, Z_i \subseteq \mathbb{R},\ Y_i \text{ jest domknięty},\ \lambda_1(Z_i) = 0\}$,
2. Opisz wszystkie σ-ciała na zbiorze skończonym.
3. Opisz σ-ciała na $\mathbb{R}$ generowane przez
   - $\mathcal{A} = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$,
   - $\mathcal{B} = \{[n, n+1] : n \in \mathbb{Z}\}$.
4. Zbadaj miarę Lebesgue'a klasycznego zbioru Cantora.
5. Skonstruuj zbiór Cantora dodatniej miary λ_1, tzn. taki zwarty podzbiór odcinka $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, który nie zawiera żadnego niepustego przedziału.
6. Pokaż, że każdy zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ spełniający $\lambda_n^*(A) > 0$ zawiera podzbiór niemierzalny.
7. Pokaż, że homeomorfizm nie musi zachowywać mierzalności. Dokładniej, znajdź przykład mierzalnych zbiorów $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$, $C \subseteq A$ oraz homeomorfizmu $f : A \to B$ takiego, że $f[C] \subseteq B$ jest niemierzalny.

   Wskazówka. Zbiory A i B mogą być np. zbiorami Cantora.
8. Czy istnieje σ-ciało zawierające dokładnie n-elementów dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
9. Udowodnij, że na σ-ciele wygenerowanym przez $\mathcal{A}$ (z zadania 3) istnieje miara μ taka, że $\mu((n, n+1)) = 2^{-|n|}$. Ile jest takich miar? Wyznacz $\mu((0, \infty))$ oraz $\mu((0, \infty) \setminus \mathbb{Z})$.
10. Dane jest σ-ciało $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru X oraz miara μ określona na $\mathcal{F}$. Dla $A \subseteq X$ kładziemy

    (1) $$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{F},\ A \subseteq B\}\,.$$

    Pokaż, że μ^* jest miarą zewnętrzną.
11. Niech μ będzie miarą Lebesgue'a λ_1 obciętą do σ-ciała generowanego przez $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{B}$ (z zadania 3). W każdym przypadku wyznacz $\mu^*(\{\pi\})$ oraz $\mu^*((\sqrt{2}, \sqrt{3}))$, gdzie funkcja μ^* jest dana przez (1).
12. Wyznacz miarę λ_1 podzbioru $[0, 1]$ składającego się z liczb, które w rozwinięciu dziesiętnym nie mają cyfry 2.
13. Niech X będzie zbiorem oraz $x \in X$. Dla $A \subseteq X$ kładziemy

    $$\delta_x(A) = 0 \quad \text{jeśli } x \notin A\,, \qquad \delta_x(A) = 1 \quad \text{jeśli } x \in A\,.$$

    Pokaż, że δ_x jest miarą zewnętrzną. Jak wygląda σ-ciało zbiorów δ_x-mierzalnych?

14. Dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ kładziemy $x_k^n = \frac{k}{n}$ oraz
$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{x_k^n} .$$
Udowodnij, że dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że zbiór $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ jest ograniczony zachodzi
$$\lim_{n\to\infty} \int f \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\lambda_1 .$$

15. Niech $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $X \neq \mathbb{R}$. Kładziemy $\mu(A) = 1$ jeśli $X \subseteq A$ oraz $\mu(A) = 0$ w pozostałych przypadkach. Czy μ jest miarą zewnętrzną na $\mathbb{R}$? Jak wygląda σ-ciało zbiorów μ-mierzalnych?

16. Niech X będzie zbiorem, $A \subseteq X$, μ będzie miarą zewnętrzną na X. Definiujemy $\nu(B) = \mu(A \cap B)$. Pokaż, że ν jest miarą zewnętrzną. Jak wygląda σ-ciało zbiorów ν-mierzalnych?

17. Niech $E \subseteq \mathbb{R}$ będzie λ_1-mierzalny. Pokaż, że $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = r^2$ dla pewnego $r \in E\}$ jest λ_2-mierzalny;

18. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, a $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy C^1. Pokaż, że
    (a) jeśli $A \subseteq \Omega$ jest λ_n-miary zero, to $\varphi[A]$ też jest λ_n-miary zero.
    (b) jeśli $A \subseteq \Omega$ jest λ_n-mierzalny, to $\varphi[A]$ też jest λ_n-mierzalny.

19. Niech $A = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Wyznacz $\lambda_1(A)$, a następnie pokaż, że jeśli A pokryjemy skończoną liczbą przedziałów to suma ich długości wynosi co najmniej jeden.

20. Niech $k < n$ oraz $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ będzie ciągłą. Wykaż, że wykres f, tj. zbiór $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : x \in \mathbb{R}^k\}$ jest miary λ_n zero. Wywnioskuj, że każda podrozmaitość różniczkowa $\mathbb{R}^n$ wymiaru mniejszego niż n ma miarę λ_n zero.

    Czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że wykres f ma dodatnią miarę λ_2?

21. Pokaż, że zbiory $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}\}$ oraz $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in Q\}$ są miary λ_2 zero.

22. Wykaż, że jeśli $A \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $B \subseteq \mathbb{R}^k$ i $\lambda_n(A) = 0$, to $\lambda^*_{n+k}(A \times B) = 0$.

23. Czy zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest typu F_σ? Czy jest typu G_δ?

    Wskazówka. Skorzystaj z twierdzenia Baire'a.

24. Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych. Wykaż, że następujące zbiory są borelowskie:
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\right\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{Q}\right\},$$

Ciekawostki

Twierdzenie ([Fed69, 2.2.13]). *Niech X będzie zupełną ośrodkową przestrzenią metryczną, Y będzie przestrzenią Hausdorffa, μ będzie borelowską miarą (zewnętrzną) na Y, $f : X \to Y$ będzie ciągła, $B \subseteq X$ będzie borelowski. Wówczas $f[B]$ jest μ-mierzalny.*

Uwaga. Może się zdarzyć, że $f[B]$ nie jest borelowski ale mimo wszystko jest μ-mierzalny.

Zadania dodatkowe

25. Niech $E \subseteq \mathbb{R}$ będzie borelowski. Pokaż, że zbiór $\{x - y : x, y \in E\}$ jest λ_1-mierzalny.

Literatura

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-62010-2,