

Definicja 1. Niech X będzie przestrzenią liniową. Funkcję $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *normą* jeśli spełnia następujące warunki.

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dla $x, y \in X$.
2. $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $x \in X$.
3. $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = 0$.

Definicja 2. Mówimy, że norma $\|\cdot\|$ *pochodzi od iloczynu skalarnego* $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ jeśli $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definicja 3. Niech $p \in (0, \infty)$. Definiujemy funkcję $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ponadto, jeśli $p = \infty$, to kładziemy

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Pokaż, że $\|\cdot\|_p$ jest normą dla $p \in [1, \infty]$.

Wskazówka: $|a + b|^p = |a + b| \cdot |a + b|^{p-1}$.

2. Niech $p, q \in [1, \infty]$ spełniają $1/p + 1/q = 1$ (zakładamy, że $1/\infty = 0$). Pokaż, że

$$\|x\|_p = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i : y \in \mathbb{R}^n, \|y\|_q \leq 1 \right\} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Niech $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}.$$

4. Na przestrzeni liniowej X dana jest norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ pochodząca od iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Pokaż, że spełniona jest *tożsamość równoległoboku*:

$$(1) \quad \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \text{dla } v, w \in X.$$

5. Na przestrzeni liniowo-topologicznej X dana jest norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca (??). Zakładamy, że operacje dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez skalar są ciągłe oraz $\|\cdot\|$ jest ciągła. Pokaż, że funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) \quad \text{dla } v, w \in X$$

definiuje iloczyn skalarny na X .

6. Opisz wszystkie normy na \mathbb{R} .
7. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Niech B będzie domkniętą kulą jednostkową w X , tj.

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Pokaż, że B spełnia następujące warunki:

- (a) jeśli $x \in B$, to $-x \in B$ (symetria środkowa względem 0),
 - (b) jeśli $x, y \in B$ oraz $t \in [0, 1]$, to $tx + (1-t)y \in B$ (wypukłość),
 - (c) dla każdego $x \in X$ istnieje $t \in (0, \infty)$ takie, że $tx \notin B$ (ograniczoność).
 - (d) dla każdego $x \in X$ istnieje $t \in (0, \infty)$ takie, że $tx \in B$ (pochłanianie).
8. Niech X będzie przestrzenią liniową, a $B \subseteq X$ będzie zbiorem spełniającym warunki ??, ??, ??, ?? z zadania ??. Definiujemy funkcję $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\|x\| = \inf \{t \in (0, \infty) : x/t \in B\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Pokaż, że $\|\cdot\|$ jest normą.

Uwaga. Powyższa funkcja to tzw. *funkcjonał Minkowskiego*.

9. Naskicuj kule jednostkowe w $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ dla $p \in (0, \infty]$.
10. Zbadaj czy poniższe zbiory są otwarte, domknięte, zwarte, wypukłe.
- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$,
 - (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| < 2\}$,
 - (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\}$,
 - (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x + y + z| \leq 4\}$,
 - (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2, x - y \geq -1\}$,
 - (f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$,
 - (g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$,
 - (h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$,
 - (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 3z \leq 7\}$,
 - (j) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > |y|\}$,
 - (k) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.
11. Znajdź przykład zbioru domkniętego $F \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takich, że $f[F] \subseteq \mathbb{R}^m$ nie jest domknięty.

Zadania dodatkowe

12. Pokaż, że norma na \mathbb{R}^2 pochodzi od iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy kula jednostkowa w tej normie jest elipsą.
13. Niech $p \in (0, 1)$. Pokaż, że istnieje liczba $K \in (0, \infty)$ taka, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^n$ oraz $t \in \mathbb{R}$ funkcja $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia

$$\|x\|_p = 0 \iff x = 0, \quad \|tx\|_p = |t| \cdot \|x\|_p, \quad \|x + y\|_p \leq K (\|x\|_p + \|y\|_p).$$

Uwaga: Funkcja spełniająca powyższe warunki nazywa się quasi-normą.

Definicja 4. Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi. Przez $\text{Hom}(X, Y)$ będziemy oznaczać przestrzeń liniową wszystkich przekształceń liniowych $X \rightarrow Y$.

14. Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Dla $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ kładziemy

$$\langle f, g \rangle = \text{trace}(f^* \circ g),$$

gdzie trace oznacza ślad przekształcenia liniowego. Pokazać, że $\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \times \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym.

15. Niech $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi. Pokazać, że funkcja $\|\cdot\| : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$$

jest normą na $\text{Hom}(X, Y)$.

16. Niech $k \leq n$. Zbadać, czy zbiór

$$\{f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) : \text{rzęd}(f) = k\}$$

jest otwarty lub domknięty w $\text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$.