Definicja 1. Niech $p \in (0, \infty)$. Definiujemy funkcję $\| \cdot \|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n .$$

Ponadto, jeśli $p = \infty$, to kładziemy

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n .$$

Stwierdzenie 1. *Jeśli $p, q \in (0, \infty]$ oraz $p \leqslant q$, to dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi*

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p .$$

Dowód. Niech $x \in \mathbb{R}^n$. Przeprowadzimy dowód tylko dla $p < q < \infty$. Korzystając z jednorodności normy możemy założyć, że

$$\|x\|_p = 1 .$$

Zauważmy, że przy powyższym założeniu mamy $|x_i| \leqslant 1$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, czyli

$$\|x\|_\infty \leqslant 1 .$$

Dobieramy $\alpha \in (0, 1)$ tak, by $q\alpha = p$. Piszemy

$$\begin{aligned} \|x\|_q^q = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{q\alpha + (1-\alpha)q} &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p |x_i|^{(1-\alpha)q} \\ &\leqslant \|x\|_\infty^{(1-\alpha)q} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|x\|_\infty^{(1-\alpha)q} \|x\|_p^p \leqslant \|x\|_p^p = 1 = \|x\|_p^q . \end{aligned}$$

Podnosząc obie strony powyższej nierówności do potęgi $1/q$ otrzymujemy tezę. □