

Zakładamy, że $n, k, m \in \mathbb{N}$, $k, m \leq n$, Z jest przestrzenią liniową, $U, V \subseteq Z$ są otwarte, $\dim X = n = \dim Z$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym na Z , e_1, \dots, e_n jest bazą ortonormalną Z , $\mathbf{E} = e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \wedge^n Z$ zadaje orientację Z , $\beta : Z \rightarrow Z^*$ dane jest przez $\beta(u)v = \langle u, v \rangle$ dla $u, v \in Z$, $\omega_i = \beta(e_i)$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, forma $x_i \in \Omega^0(U)$ dana jest przez $x_i(a) = \langle a, e_i \rangle$ dla $a \in U$ oraz $i \in \{1, 2, \dots, n\}$; mamy zatem $dx_i(a) = \omega_i$ dla każdego $a \in U$ oraz $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definicja (Gwiazdka Hodge'a). Definiujemy izometrie liniowe

$$* : \wedge^k Z \rightarrow \wedge^{n-k} Z \quad \text{oraz} \quad * : \wedge^k Z^* \rightarrow \wedge^{n-k} Z^*,$$

zadając je na bazie w następujący sposób

$$*e_\lambda = (-1)^N e_\sigma \quad \text{oraz} \quad *\omega_\lambda = (-1)^N \omega_\sigma,$$

gdzie $\lambda \in \Lambda(n, k)$, $\sigma \in \Lambda(n, n - k)$ są takie, że

$$\text{im } \lambda \cup \text{im } \sigma = \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{oraz} \quad N = \#\{(i, j) \in \text{im } \lambda \times \text{im } \sigma : i > j\}.$$

Definicja. Niech $M \subseteq N \subseteq U$, M i N będą rozmaitościami wymiaru m klasy C^1 , $\partial M := \overline{M} \setminus M$ będzie rozmaitością wymiaru $m - 1$ klasy C^1 . Przez *zewnątrzny wektor normalny do M w punkcie $p \in \partial M$* rozumiemy jedyny wektor $\nu_M(p) \in Z$ spełniający

$$\|\nu_M(p)\| = 1, \quad \nu_M(p) \in T_p N, \quad \nu_M(p) \perp T_p \partial M$$

oraz dla każdej krzywej $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, Z)$ spełniającej $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma'(0) = \nu_M(p)$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że

$$\gamma(t) \in Z \setminus M \quad \text{dla } t \in (0, \varepsilon).$$

Twierdzenie (Stokesa). Niech M, N będą jak wyżej, τ zadaje orientację N , σ zadaje orientację ∂M , $\nu_M(p) \wedge \sigma(p) = \tau(p)$ dla $p \in \partial M$ (mamy zatem $\sigma(p) = *\nu_M(p)$; zob. zad 1). Wówczas

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega \quad \text{dla } \omega \in \Omega^{m-1}(U).$$

Uwaga. Załóżmy, że v_1, \dots, v_m jest bazą $T_p N$, $\alpha \in \text{Hom}(Z, \mathbb{R})$ spełnia $\alpha(v_1) = 1$ oraz $\alpha(v_i) = 0$ dla $i \in \{2, 3, \dots, m\}$, v_2, \dots, v_m rozpinają $T_p \partial M$, $\tau(p) = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$. Wówczas $\sigma(p) = \tau(p) \lrcorner \alpha = v_2 \wedge \dots \wedge v_m$.

Definicja. Operator $\delta : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$ dany jest wzorem $\delta = *d*$.

1. Pokaż, że dla dowolnych $\xi, \eta \in \wedge^k Z$ oraz $\phi \in \wedge^k Z^*$ zachodzą wzory

$$\xi \wedge *\eta = \langle \xi, \eta \rangle \mathbf{E}, \quad *\phi(*\eta) = \phi(\eta), \quad **\xi = (-1)^{k(n-k)} \xi \quad \text{oraz} \quad \delta\delta = 0.$$

2. Niech $\phi_i \in \Omega^0(U)$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \wedge dx_i \in \Omega^1(U)$. Wyznacz $\delta\phi \in \Omega^0(U)$.
3. Niech $g_i \in C^\infty(U)$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $g \in C^\infty(U, \wedge^1 Z)$ będzie polem 1-wektorowym danym wzorem $g = \sum_{i=1}^n g_i \wedge e_i$, $f \in \Omega^0(U)$. Udowodnij, że *dywergencja g* wyraża się przez

$$\text{div } g(x) = \text{trace } Dg(x) = \delta(\beta \circ g)(x) = *d*(\beta \circ g)(x);$$

laplasjan f wyraża się przez

$$\Delta f(x) = \text{trace } D^2 f(x) = \text{div grad } f(x) = \delta df(x) = *d*df(x);$$

jeśli $n = 3$, to *rotacja g* wyraża się przez

$$\begin{aligned} \text{rot } g(x) &= \beta^{-1}(*d(\beta \circ g)) = (\langle Dg(x)e_2, e_3 \rangle - \langle Dg(x)e_3, e_2 \rangle)e_1 \\ &\quad + (\langle Dg(x)e_3, e_1 \rangle - \langle Dg(x)e_1, e_3 \rangle)e_2 \\ &\quad + (\langle Dg(x)e_1, e_2 \rangle - \langle Dg(x)e_2, e_1 \rangle)e_3. \end{aligned}$$

4. [Twierdzenie Gaussa jako konsekwencja twierdzenia Stokesa] Niech $W \subseteq U$ będzie otwarty i ograniczony, $\overline{W} \subseteq U$, ∂W będzie rozmaitością klasy C^1 . Korzystając z twierdzenia Stokesa pokaż, że

$$\int_W \operatorname{div} g(x) \, d\lambda_n(x) = \int_{\partial W} \langle g(x), \nu_W(x) \rangle \, d\sigma_{n-1}(x) \quad \text{dla } g \in C^1(U, Z).$$

5. Niech $f \in C^1(U)$ ma zwarty nośnik. Pokaż, że

$$\int_U Df(x)v \, d\lambda_n(x) = 0 \quad \text{dla każdego } v \in Z.$$

6. Niech $g \in C^1(U, Z)$ będzie polem wektorowym na U . Wykaż, że

$$\operatorname{div} g(a) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\lambda_n(\mathbf{B}(a, r))} \int_{\partial \mathbf{B}(a, r)} \langle g(x), \frac{x-a}{|x-a|} \rangle \, d\sigma_{n-1}(x).$$

Uwaga. Jeśli $g(x)$ interpretujemy fizycznie jako wektor prędkości cząsteczki pewnej substancji (albo elektronu) w punkcie x , to $\operatorname{div} g(a)$ jest liczbą, która wskazuje jak bardzo a jest źródłem, tzn. czy średnio z punktu a substancja wypływa, czy raczej jest tam zatrzymywana.

7. Niech pola wektorowe $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą dane wzorami $g(x, y) = (-y, x)$ oraz $h(u, v, w) = (-v, u, w)$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Naszkicuj strzałki tych pól. Oblicz $\operatorname{div} g(0)$, $\operatorname{div} h(0)$, $\operatorname{rot} h(0)$.
8. Niech $W \subseteq Z$ będzie otwarty i taki, że ∂W jest rozmaitością klasy C^1 , $g : Z \rightarrow Z$ będzie polem wektorowym klasy C^1 o zwartym nośniku, $F_t(z) = z + tg(z)$ dla $t \in \mathbb{R}$ i $z \in Z$. Wykaż, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że F_t jest dyfeomorfizmem dla $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a następnie oblicz

$$\left. \frac{d}{dt} \lambda_n(F_t[W]) \right|_{t=0}.$$

9. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g : Z \rightarrow \mathbb{R}$ będą takie, że $g(z) = f(\|z\|)$ dla $z \in Z$. Oblicz $\Delta g(z)$.
10. Niech $f, g \in C^2(U)$. Oblicz $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} g)$.
11. Niech $n \geq 3$, $K(x) = (n(n-2)\alpha(n))^{-1} \|x\|^{2-n}$ dla $x \in Z$ oraz $g \in C^2(Z)$.

- (a) Oblicz $\Delta K(x)$ dla $x \in Z \setminus \{0\}$. (*Wskazówka.* Może się przydać zadanie 9).
- (b) Oblicz $\langle \operatorname{grad} K(y), y \rangle$ dla $y \in Z$.
- (c) Oblicz $\int_{\partial \mathbf{B}(0, r)} f(x-y) \langle \operatorname{grad} K(y), \nu_{\mathbf{B}(0, r)}(y) \rangle \, d\sigma_{n-1}(y)$.
- (d) Niech $u = K \star g$. Wyznacz Δu . Dlaczego $\Delta u \neq \Delta K \star g$?

Wskazówka. Przedstaw $\Delta u(x)$ w postaci

$$\Delta u(x) = \lim_{r \downarrow 0} \int_{Z \setminus \mathbf{B}(x, r)} \Delta K(x-y) f(y) \, d\lambda_n(y) + \int_{\mathbf{B}(0, r)} K(y) \Delta f(x-y) \, d\lambda_n(y).$$

Następnie skorzystaj z zadania 10 oraz Twierdzenia Gaussa o dywergencji.